Erläuterungen zu Modul 8:
Entwicklung von Aufgaben für die Kooperation von Schülern

BLK-PROGRAMM

SINUS - Transfer

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mit Aufgaben Kommunikation und Kooperation im Mathematikunterricht fördern – fachliches und soziales Lernen miteinander verbinden

Timo Leuders

Kooperatives Lernen aus der Sicht des Lernenden heißt: beim Lernen die Sache und den Anderen gleichermaßen im Blick haben. Dieser soziale Aspekt des „gemeinsamen Lernens“ ist einer der Gründe, warum die meisten Schülerinnen und Schüler eine Vorliebe für Gruppenarbeit bekunden. Auch aus Sicht des Lehrenden gibt es eine ganze Reihe von guten Gründen für die Berücksichtigung kooperativer Lernformen. Will man die am häufigsten angeführten auf einige knappe Formeln bringen, so könnten diese etwa so lauten:

- Stärkere Beteiligung und höhere Aktivität des Einzelnen
- Förderung von Kommunikationsfähigkeiten
- Förderung von Kooperationsfähigkeit und Verantwortungsbereitschaft
- Höheres Reflexionsniveau und tieferes Verstehen beim „Lernen durch Lehren“
- Aktives Aushandeln statt Wissensübernahme („konstruktivistisches Lernen“)

Auf eine einfache Formel gebracht:

> Kooperative Lernformen bilden die Grundlage dafür, dass *kognitives Lernen* und *soziales Lernen* im Unterricht miteinander verbunden werden.

Die eben aufgeführten Aspekte verdienen sicherlich eine ausführlichere Darlegung. Sie werden an dieser Stelle aber nur kurz angerissen, da sie *unabhängig* vom jeweiligen Schulfach gültig sind. Man findet eine große Zahl von Texten, die allgemein Vorteile und Beispiele kooperativen Lernens ausführen (z.B. Johnson und Johnson 1989, Dubs 1995, Meyer 1996 oder die SINUS-Handreichungen Gräber und Kleuker 1998).

Es gibt viele Fortbildungsprogramme, die sich dem kooperativen Lernen widmen (z.B. Klippert 1998, Green/Green 2005). Diese sind allerdings nicht abgestellt auf die Besonderheiten und Bedürfnisse des Faches Mathematik. So einleuchtend die dort vorgebrachten Argumente und Beispiele sind, so schwierig ist es mitunter, die vorgeschlagenen methodischen Arrangements auf das fachliche Lernen im Mathematikunterricht zu übertragen. Das liegt natürlich auch daran, dass die zentralen Aspekte des Mathematiklernens, wie etwa die Prozesse der Begriffsbildung, die Formen des Kommunizierens und Argumentierens oder der spezifische Umgang des Faches mit der realen Welt nicht losgelöst vom Fach gesehen werden können. Im Gegenteil: Gerade diese Besonderheiten sind ja der Grund, warum es das jeweilige Fach überhaupt gibt.

Aus diesem Grund hat sich der vorliegende Beitrag den Anspruch gesetzt, Gründe und Beispiele für das kooperative Lernen aus der spezifischen Perspektive des Faches Mathematik zu entwickeln und dabei zahlreiche Anregungen für das Arrangement kooperativer Lernumgebungen, insbesondere für die Entwicklung und Auswahl geeigneter Aufgaben zu geben.

1. Gründe für Kooperation und Kommunikation im Mathematikunterricht

Wieso soll auch und gerade das Fach Mathematik sich stärker auf die Chancen des kooperativen Lernens einlassen? Neben den fachunabhängigen Argumenten sollten hier vor allem zwei fachspezifische Gründe angeführt und erläutert werden:

Erster fachlicher Grund: Kooperatives Lernen ist eine tragende Säule eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts

Mathematikunterricht kann und darf sich hinsichtlich des Allgemeinbildungs- und Erziehungsauftrags von Schule nicht ausklammern. Wesentliche Aspekte des Bildungsauftrages von Schule, wie etwa die Vermittlung sozialer Kompetenzen oder die Förderung kritischen Reflexionsvermögens, können nicht an einzelne Fächer delegiert werden. Dass die Mathematik sich hier dennoch zuweilen zurückhält, hat wohl vor allem Gründe in ihrem Gegenstandsbereich: Die Mathematik als *Kulturtechnik* (vor allem das Rechnen und Überschlagen) ist zwar beteiligt an sozialen Prozessen, wird aber eher als Handwerkszeug denn als Kommunikationsmittel verstanden. Die Mathematik als *Wissenschaftsdisziplin* befasst sich primär mit mathematischen Ideen, das sind abstrakte geistige Phänomene, die auf den ersten Blick keine Beziehung zu gesellschaftlichen Phänomenen zu haben scheinen.
Beide Sichtweisen sind zutiefst einseitig und verkürzend: Als *Kulturtechnik* ist Mathematik in hohem Maße zum Kommunikationsinstrument geworden. Ein beträchtlicher Teil der Information, deren Austausch zur gesellschaftlichen Teilhabe notwendig ist, tritt uns in mathematischer Gestalt entgegen: Jeder von uns muss Zahlenangaben, Tabellen und Grafen lesen und verstehen, Statistiken nicht nur zur Kenntnis nehmen, sondern auch kritisch beurteilen können. Als *Wissenschaftsdisziplin* durchdringt die Mathematik unseren zunehmend technisch bestimmten Alltag. Ohne Mathematik sind kein Handy und kein Internet denkbar. Ob wir Online-Banking vertrauen, hängt auch davon ab, wie sehr wir uns auf die Mathematik dahinter verlassen. Schließlich müssen Laien und Fachleute – in Zukunft vielleicht noch mehr als heute – bei der Aushandlung gesellschaftlicher Entscheidungen über die Mathematik und ihre Rolle in Diskurs treten können.

Die Konsequenz aus diesen – keineswegs neuen – Erkenntnissen ist: Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht muss diese sozialen Aspekte von Mathematik in seinen Inhalten und in seiner Gestaltung ernst nehmen. Er ist dabei mindestens ebenso den sozialen Prozessen, der Einübung in Kooperation und soziale Verantwortung wie den fachlichen Inhalten verpflichtet. (Auf diese Zusammenhänge hat vor allem Heymann 1996 hingewiesen).

Als ein Beispiel für den spezifischen Beitrag, den das Fach Mathematik zum sozialen Lernen leisten kann, sei hier der *konstruktive Umgang mit Unterschieden* genannt: mit Meinungsunterschieden im Einzelfall und mit Leistungsunterschieden generell.

Meinungsunterschiede lassen sich im Fach Mathematik vermeintlich leicht klären – richtig oder falsch ist ja dort angeblich festgelegt (aus Schülersicht manchmal leider eher durch das Diktum des Lehrers als durch die Möglichkeit zur objektiven Prüfung). Doch auch im Mathematikunterricht ist Meinungsvielfalt und sachlicher Diskurs oberstes Prinzip – manche Aussagen kann man überprüfen, andere hängen von individuellen Entscheidungen ab. In solchen Situationen muss man zusammenarbeiten können, gemeinsame Entscheidungen treffen und Unterschiede gelten lassen (hierzu gibt der folgende Teil einige Beispiele).

Leistungsunterschiede zwischen Menschen sind – auch in einem gegliederten Schulsystem und erst recht in der Gesellschaft – unsere tägliche Erfahrung. In der Schule besteht die Chance, dass Schülerinnen und Schüler Wege finden, mit diesen Unterschieden konstruktiv umzugehen. Das bedeutet, dass sie Mitschülern selbstverständlich bei deren Lernbemühungen helfen (nicht nur um gut dazustehen) und umgekehrt auch, dass sie sich helfen lassen, bzw. aktiv Hilfe suchen. In Klassen, die behinderte Mitschüler integrieren, sind solche Lerneffekte besonders offenkundig.

Leider hat die aktuelle bildungspolitische Entwicklung dazu geführt, dass in den neu erscheinenden Standards und zentralen Tests hinsichtlich der Erwartungen an Schülerinnen und Schüler bewusst auf „fachliche und kognitive Kompetenzen“ abgehoben wird. Es wird gefordert, *dass* und überprüft *ob* Schülerinnen und Schüler bestimmte Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse erfolgreich zur Bewältigung bestimmter fachlicher und alltäglicher Situationen einsetzen können. Schwieriger ist aber, zu beschreiben und zu überprüfen, wie sie dies auf verantwortungsvolle oder kooperative Weise tun. Insofern sollte man „Bildungsstandards“ auch nur als „fachliche Leistungsstandards“ ansehen, und darauf Wert legen, dass allgemeinbildende Aspekte des Fachunterrichts, die sich hier nicht wieder finden, nicht in den Hintergrund gedrängt werden.

Fachliche, soziale und personale Kompetenzen finden im Mathematikunterricht vor allem dort zusammen, wo prozessbezogene Kompetenzen im Fokus sind, z.B.:

Kognitive Kompetenz…	… und damit verbundene soziale Haltung
Schülerinnen und Schüler sollen…	
in eigenen Worten und mit Fachbegriffen schlüssig **argumentieren**	und dabei konstruktiv mit Dissens und mit (fremden und eigenen) Fehlern umgehen
Informationen aus mathematischen **Darstellungen** entnehmen	und dabei die Qualität und die dahinter liegenden Absichten der Darstellung kritisch hinterfragen
die Wirklichkeit mit mathematischen **Modellen** beschreiben	und dabei mit der Pluralität und Interessenabhängigkeit von Modellen umgehen
inner- und außermathematische **Probleme lösen**	und sich dabei selbstständig und der Sache angemessen arbeitsteilig organisieren

Zweiter fachlicher Grund: Kooperatives Lernen spiegelt die Arbeitsweise auch in der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik wider

Der scheinbar fertige Aufbau des Gebäudes „Mathematik“, die unverbrüchliche Festlegung von wahr und falsch in den mathematischen Lehrbüchern, die Gestalt, in der die Mathematik dem Erstsemesterstudierenden begegnen, verdecken den Blick auf die Mathematik, wie sie sich dem aktiv Mathematik Treibenden darstellt. Mathematik entsteht nicht allein im Kopf und am Schreibtisch einzelner Mathematiker, sondern ist zugleich ein soziales Phänomen: Mathematische Zusammenhänge werden in der Regel nicht einfach nur abgeleitet oder bewiesen, sondern haben eine verzweigte Entstehungsgeschichte. Mathematiker stellen aufgrund von Beispielen, Erfahrungen oder von nicht präzisierbaren Intuitionen Hypothesen auf. „Mathematische Begriffe und Denksysteme haben einen theoretischen Charakter. Sie gehen so, wie sie entstanden sind, nicht zwingend aus der Wirklichkeit hervor; vielmehr handelt es sich um gedankliche Entwürfe und Konstruktionen, mit denen man die Wirklichkeit deuten, erforschen und gestalten kann.“ (Hefendehl-Hebeker 2005). Man spricht wegen der sich hierin offenbarenden Analogie zu den Naturwissenschaften auch vom *quasi-empirischen* Vorgehen der Mathematiker. Mathematik zu erfinden, ist also ein Prozess, in dem sich Begriffe und Ideen in einem Wechselspiel von Vermuten und Überprüfen weiterentwickeln. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Kommunikation und Kooperation zwischen Menschen. Ob sich ein Begriff durchsetzt, hängt auch davon ab, ob er in der Kommunität der Mathematiker überzeugen kann. Dieser Prozess ist charakterisiert durch eine zunehmende Präzisierung der mathematischen Begriffe, wodurch die Gefahr von Missverständnissen vermindert und die Grundlage für eine soziale Konsensfindung gebildet wird.

Solche Phänomene des kooperativen mathematischen Erkenntnisgewinns können und sollen sich auch in der Organisation des Mathematikunterrichtes widerspiegeln. Schüler erfinden und entdecken Mathematik auf individuellen Lernwegen („Ich habe es so gemacht…“), die sie dann in Vergleich bringen und gemeinsam weiter erkunden („Wie hast du es gemacht?“) und schließlich in einem Prozess der Konsensfindung zusammenführen („So machen wir es ab!“). Ein so verstandenes „dialogische Lernen“ (Gallin/Ruf 1998) basiert auf Kooperation zwischen Schülerinnen und Schülern - aber auch auf einer kooperativen Grundhaltung der Lehrkraft, wenn sie schließlich Normierungen in den Lernprozess einbringt. Das Ergebnis solcher Prozesse, also letztlich die mathematischen Begriffe, sind somit – auch in der Schule – das Produkt sozialer Aushandlungen und nicht etwa zu übermittelndes „Fertigwissen“.

Zusammenfassend könnte man es so ausdrücken: Mathematische Tätigkeiten – ob nun in der Wissenschaft oder im Klassenraum – sind in hohem Maße Tätigkeiten, die den sozialen Austausch zur Voraussetzung haben:

- Mathematisches **Argumentieren** ist ein kommunikativer Akt, bei dem es darum geht nicht nur sich selbst, sondern vor allem andere zu überzeugen.
- Beim **Modellieren** müssen Entscheidungen getroffen und Vereinfachungen gemacht werden, die man erst in der Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Ansätzen in ihrer Angemessenheit beurteilen kann.
- Kooperatives **Problemlösen** ist nicht nur wirkungsvoller als individuelles Arbeiten, zusätzlich kann man aus den Strategien anderer lernen und sein Repertoire erweitern.

Es gibt also viele Gründe dafür, im Mathematikunterricht Phasen kooperativen Lernens stärker zu berücksichtigen. Zu den schlechtesten Gründen zählt wohl das Argument, man müsse die Kinder zwischendurch immer wieder etwas von dem Druck der strengen Mathematik befreien, ihnen sozusagen Freilaufphasen geben, in denen das Soziale einmal wichtiger ist als die Mathematik. Diese Haltung hieße, die Mathematik als Disziplin reduktionistisch abzuwerten und die allgemeinbildende Rolle der Mathematik zu verkennen. Die vorstehenden Argumente und mehr noch die nun folgenden Beispiele belegen hingegen, dass im kooperativen Lernen viele Chancen für die organische Verbindung von fachlichem und sozialem Lernen liegen.

2. Kooperatives Lernen im Fach Mathematik gestalten

Kooperatives Lernen ist kein Selbstzweck und auch keine Kompensation für das ansonsten drohende Übergewicht kognitiven Lernens. Vielmehr müssen kognitives und soziales Lernen in kooperativen Lernformen miteinander verschmelzen. Wann und wie fällt man aber die Entscheidung darüber, ob und wie man den Lernprozess im Einzelfall kooperativ anlegt?

Bei der Planung von Unterricht steht (in der Regel) zunächst ein thematischer roter Faden im Vordergrund. Das kann ein mathematischer Gegenstand sein, aber auch ein Lernfeld mit starkem Alltagsbezug, an dem sich mathematische Gegenstände entfalten (wie etwa in projektartigem Unterricht). An zweiter Stelle überlegt eine Lehrperson, welche mathematischen Ideen, welche Probleme und Fragen an einer bestimmten Stelle günstig für die folgenden Lernprozesse wären. Dabei kann es sein, dass das anstehende Thema besonders geeignet ist, um bestimmte mathematische Tätigkeiten, wie etwa das Modellieren oder das Argumentieren, anzuregen oder sogar zu reflektieren. (Es ist auch denkbar, dass zuweilen solche mathematischen Prozesse im Vordergrund stehen und passende inhaltliche Themen erst nachträglich gewählt werden.)

Erst im dritten Schritt werden aus diesen Überlegungen konkrete Aufgaben und Unterrichtsarrangements. Geeignete Aufgaben sind dabei die „Steilvorlagen" für guten Unterricht (s. Büchter/Leuders 2005), aber noch keine Erfolgsgarantie. Daher müssen die Aufgaben und das methodische Arrangement, in dem Schülerinnen und Schüler diese Aufgaben bearbeiten, als eng zusammengehörig gedacht und geplant werden. Hier nun ist im Einzelfall zu überlegen, welche Rolle kooperative Lernarrangements spielen können. Dabei achtet man unter anderem auf die folgenden Aspekte:

- Welche ***Funktion*** hat die geplante Unterrichtsphase? Geht es um ein offenes und Vielfalt erzeugendes Erkunden, um ein absicherndes und vernetzendes Üben oder um das Anwenden bestimmter Kompetenzen? Von dieser Frage hängt ab, welche der vielen denkbaren kooperativen Arrangements seine Wirkung vermutlich am besten entfalten kann.

- Auf welche ***mathematischen Prozesse*** möchte man einen Schwerpunkt legen? Sollen die Schülerinnen und Schüler etwa
    - offene Situationen erkunden
    - Vermutungen finden und Begründungen suchen
    - Realsituationen mathematisieren oder
    - Begriffe systematisieren?

  oder gar Mehreres davon?

- Mit welchen mathematischen ***Ideen, Begriffe und Inhalten*** bzw. auf welche hin soll gearbeitet werden? Gibt es für die Schülerinnen und Schüler Gelegenheiten, diese Inhalte oder Begriffe auf verschiedenen Wegen zu erkunden, sie miteinander auszuhandeln?

- Welche ***Fähigkeiten kooperativen Arbeitens*** können bereits vorausgesetzt werden, bzw. welche Aspekte sollten besonders gefördert werden?

Bei der Beantwortung dieser Fragen ergibt sich ein Bild, in wie weit und welche kooperativen Lernformen zum Einsatz kommen können, welche im Einzelfall geeignet sind und wie sinnvolle methodische Arrangements aussehen können. Allerdings lässt sich eine solche Entscheidung nicht algorithmisch erzeugen, nach dem Motto: „Unter diesen und jenen Bedingungen ist diese und jene Methode sinnvoll“. Zunächst einmal sind die inhaltliche Gestaltung einer Aufgabe und die organisatorische Gestaltung in Form einer Unterrichtsmethode nicht voneinander zu trennen. Zudem ist die Kooperationsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern Voraussetzung und Ziel des Unterrichts gleichermaßen: Wer Kooperation durch methodische Gestaltung fördern will, muss immer schon davon ausgehen und darauf vertrauen, dass Schülerinnen und Schüler in bestimmter Weise kooperieren können.

Diese Verschränkung von Inhalt und Methode und von Voraussetzung und Ziel macht es natürlich nicht leicht, kooperatives Lernen zu „planen“. Einfache Rezepte, die unabhängig von der jeweiligen Lerngruppe funktionieren, sind nicht angebracht. Dennoch lassen sich einige prinzipielle Anforderungen als notwendige Bedingungen an kooperative Lernsituationen formulieren:

- Die **Kommunikation und Argumentation** zwischen Schülerinnen und Schülern ist Bestandteil von Kooperation und damit Voraussetzung für kooperatives Lernen.
- Damit ein solcher Austausch stattfindet, müssen die Problemstellungen den Schülerinnen und Schülern Bewertungs- und Entscheidungsspielräume lassen, sie müssen also hinreichend **offen** sein.

Aufgabenstellungen, bei denen es eine einzige Lösung gibt und im Wesentlichen auch nur einen Weg dorthin, sind somit nur wenig für kooperatives Arbeiten geeignet. Wenn alle Schülerinnen und Schüler im Prinzip dasselbe tun sollen und dabei unterschieden werden in diejenigen, die es richtig machen und diejenigen, die es falsch machen, tritt eine Verarmung der kognitiven Aktivität ein: Im Klassenunterricht beteiligen sich nur wenige Schüler, in einer Gruppenarbeit arbeitet eine einzelne Schülerin, die anderen warten ab und verfolgen das Geschehen. Dass diese „Mitläufer“ aktiv zuhören und das Gesagte „mitvollziehen“ und davon profitieren, bleibt zumeist Illusion.

Für die Anregung geistiger Aktivität bedarf es also einer Lösungsvielfalt, eines Problems, das hinreichend offen ist, so dass es verschiedene Ansätze, Lösungen oder Deutungen gibt.
Es wäre allerdings ein Irrtum, zu meinen, eine solche Offenheit liege bei den typischen Problemen des Faches Mathematik weniger nahe. Es ist kein unumgängliches Charakteristikum der Mathematik, sondern ein Defizit in der Qualität der Aufgabenstellung, wenn Schüler keine eigenen Wege beschreiten können.

In diesem Sinne ist also Offenheit die Voraussetzung für Vielfalt, Vielfalt eine gute Voraussetzung für Kommunikation und Argumentieren, und dies wiederum eine Vorbedingung für Kooperation. Dass für eine gelingende Kooperation auch andere Rahmenbedingungen gegeben sein sollten ist weiter oben bereits angesprochen worden.

Neben diesen notwendigen Bedingungen im Lernarrangement gibt es einige Merkmale für Lernsituationen, die dem kooperativen Lernen förderlich sind, und die diesen allgemeinen Teil beschließen sollen.

Merkmale eines Kooperation fördernden Mathematikunterrichts

Schülerinnen und Schüler

- kommunizieren direkt miteinander und nicht über die Lehrperson
- stellen „echte" Fragen an ihre Mitschüler und an den Lehrer
- handeln Ziele und Produkte miteinander aus
- präsentieren Ergebnisse ihrer Gruppenarbeit und vertreten diese
- hängen positiv voneinander ab
- ….

3. Beispiele für kooperatives Lernen im Fach Mathematik

Im Folgenden werden nun einige geeignete Probleme und Unterrichtsarrangements dargestellt, die für eine kooperative Bearbeitung geeignet sind. An diesen Beispielen werden hilfreiche Prinzipien zur Konstruktion eigener Aufgaben erläutert.

(1) Gruppenexplorationen

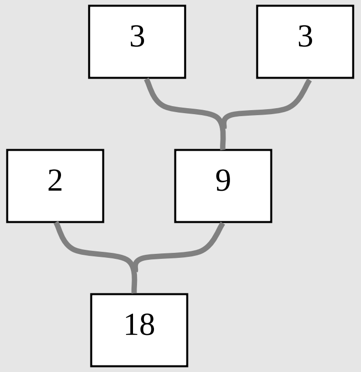
Der Einstieg in mathematische Themen vollzieht sich oft über betont divergente Phasen, in denen Schülerinnen und Schüler zunächst einmal eine Vielfalt individueller Ergebnisse produzieren und später diese Beispiele zusammenführen und systematisieren. Beide Phasen, die divergente und die konvergente, geben Gelegenheiten für kooperative Arbeitsformen, wie die folgenden Beispiele belegen:

Beispiel: Arbeitsteilige Primfaktorzerlegung

Ihr habt beim Aufteilen von Schokoladentafeln festgestellt, dass man Zahlen auf verschiedene Weise zerlegen kann, z.B.:

$18 = 6 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 9$

Nun kann man aber die 9 noch weiter zerlegen: $9 = 3 \cdot 3$. Dazu kann man einen **Zahlenbaum** zeichnen, bei dem sich der Stamm in Äste teilt und die Äste noch weiter teilen:



Natürlich kann das manchmal noch weiter gehen. Untersucht alle Zahlen von 1 bis 50 darauf, welche Bäume aus ihnen wachsen.

Da es so viele Zahlen sind, könnt Ihr euch die Arbeit teilen: Vorne liegen leere Blätter und eine Liste mit den Zahlen von 1 bis 50 (zweimal – zu jeder Zahl dürfen zwei Teams einen Baum zeichnen). Entscheidet euch für eine Zahl, streicht sie auf der Liste und zeichnet einen zugehörigen Baum. Wenn ihr den Baum fertig habt, bringt ihn nach vorne und holt euch eine neue Zahl ab.

Dieses Beispiel ist eine eher schwache Form der Kooperation, denn die Art der Arbeitsteilung wurde von der Lehrperson im Voraus entschieden und organisiert. Schülerinnen und Schüler können nun allerdings noch nach eigenen Wünschen Zahlen auswählen, z.B. solche, die ihnen besonders einfach oder besonders interessant erscheinen. Wenn schließlich alle Zahlenbäume reihum an den Klassenwänden hängen, erleben sie, dass sie gemeinsam eine umfangreiche Arbeit erledigt haben, die jeden Einzelnen überfordert hätte. Die anschließende Phase, der Systematisierung kann dann durch die Lehrperson moderiert werden: Schülerinnen und Schüler erkennen die sich wiederholenden Primfaktoren in den Ästen, entdecken aber auch verschiedene Bäume zu derselben Wurzelzahl. Deren Endäste enthalten aber immer wieder dieselben Zahlen nur in verschiedener Anordnung, usw. …

Aufgaben wie diese kann man immer dann stellen, wenn Schülerinnen und Schüler einen umfangreichen Bereich mit vielen Beispielen arbeitsteilig erkunden sollen, z.B. eine Vielzahl von geometrischen Figuren oder eine große Zahl von Zufallsexperimenten.

Natürlich gibt es auch Aufgaben, bei denen die Schülerinnen und Schüler *selbst* über die Arbeitsteilung entscheiden, wie im folgenden Beispiel:

Beispielaufgabe: Tischanordnung

Sabrina hilft im Restaurant aus. Für die Touristen muss sie Tische zusammenstellen. Die Tische im Saal sind alle quadratisch und bieten, einzeln gestellt, auf jeder Seite einem Gast Platz. Es kommen 19 Gäste.

Entscheidet in Kleingruppen:
Was sollte für Sabrina bei der Problemlösung am wichtigsten sein? Worauf sollte sie besonders achten?

Tragt eure Anforderungen zusammen.
Jede Gruppe sollte sich eine Anforderung vornehmen.

Dann erarbeitet jede Gruppe eine möglichst gute Sitzordnung. Haltet das Ergebnis und die Begründung dafür auf einem kleinen Poster fest und wählt ein Gruppenmitglied, das das Ergebnis später dem Restaurantchef vorträgt.

Hier sind es die Schülerinnen und Schüler, die die Arbeitsteilung – gegebenenfalls moderiert von der Lehrperson – vornehmen. Ein solches Lernarrangement besteht dann etwa aus einer ersten Phase, in der die möglichen unterschiedlichen Ansätze gesammelt und verteilt werden, einer zweiten der Bearbeitung und einer dritten der Zusammenführung. Es eignen sich allerdings nur solche Probleme, die so offen sind, dass sie hinreichend viele Ansätze ermöglichen und dass die Formulierung der unterschiedlichen Ansätze noch nicht der Lösung gleichkommt. Im Beispiel können die Ansätze z.B. lauten:

- Die Tische sollten möglichst so stehen, dass jeder jeden sehen kann
- Die Tische sollten möglichst so stehen, dass es keine Behinderungen der Gäste oder Kellner gibt
- Es sollten möglichst wenig Tische benötigt werden
- Die Tische sollten möglichst schön angeordnet sein
- Die Tische sollten möglichst wenig Platz einnehmen

Aufgaben, die sich für ein solches arbeitsteiliges Vorgehen eignen, sind vor allem ergebnisoffene Erkundungen“ (so genannte „open ended problems“, vgl. Becker/Shimada 1997, Büchter/Leuders 2005), wie etwa die folgenden:

- Wie soll man beim Werfen von fünf Murmeln messen, welche Anordnung am „engsten“ zusammen liegt?
- Wie soll man beim Laufwettbewerb die Teamleistung verschiedener Gruppen miteinander vergleichen? Wie soll man entscheiden, wer gewinnt?
- Welche Vermutungen kann man beim mehrmaligen Falten von Papier über die entstehenden Winkel beim auseinander gefalteten Blatt aufstellen und wie lassen sie sich begründen?

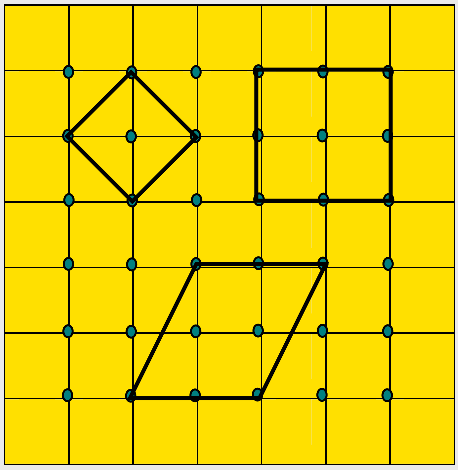
Bei manchen solcher Aufgaben wie etwa beim ersten und zweiten Beispiel handelt es um so genannte „normative Modelle“, also Situationen, in denen konkurrierende mathematische Bewertungs- oder Entscheidungsmodelle aufgestellt werden können. Solche Situationen fördern in besonderem Maße den Diskurs zwischen Schülerinnen und Schülern, weil auch subjektive Aspekte in die Konstruktion und die Bewertung eines Modells eingehen.

In der Aufgabe „Tischanordnung“ sollen die Schüler in einer ersten Phase mögliche Ansätze zusammentragen und danach arbeitsteilig bearbeiten. Natürlich kann man die Schülerinnen und Schüler in Gruppen auch direkt und mit identischem Auftrag an die Probleme herangehen lassen. Dann ergibt sich die Ansatz- und Lösungsvielfalt durch die verschiedenen Wege, die die Gruppen vermutlich einschlagen. Durch die gemeinsame Reflexion unterschiedlicher Ansätze und die bewusste Aufteilung zu Anfang kann aber eine größere Vielfalt erzeugt werden, es ergeben sich oft noch mehr Gelegenheiten zur Argumentation. Die Lehrperson kann auch dazu ermuntern, dass sich eine einzelne Gruppe auch mit zunächst vielleicht abseitig erscheinenden Ansätzen befasst. Eine solche Arbeitsweise ist auch im Berufsleben üblich z.B. bei Erkundungsphasen von „Kreativteams“, die Problemsituationen (eine neue Verpackung, eine neue Werbung) zunächst mit dem Ziel einer großen Lösungsvielfalt angehen.

(2) Kooperative Begriffsbildungen

Viele mathematische Begriffe entstehen aus der Systematisierung einer zunächst unsortierten Fülle von Einzelfällen oder Erfahrungen. Durch das Sammeln und Strukturieren dieser Einzelfälle werden Zusammenhänge sichtbar, die zu mathematischen Abstraktionen führen.
Diese mathematischen Tätigkeiten - das Sammeln, Strukturieren und Bilden von Begriffen - sind keineswegs der Erarbeitung im Klassengespräch vorbehalten, sondern eignen sich für eine kooperative Bearbeitung in Gruppen.

Beispielaufgabe:



1. Phase (Einzel- oder Partnerarbeit): Spannt am Geobrett möglichst viele verschiedene Vierecke, übertrage sie auf Papier und schneide sie aus. Sortiere sie.
2. Phase (Gruppenarbeit): Sortiert die Vierecke in verschiedene Gruppen, gebt den Gruppen einen Namen und klebt sie auf ein Poster.
3. Phase (Klassengespräch): Legt die Poster aus und sucht nach Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Einigt euch auf eine gemeinsame Art und Weise, die Vierecke zu ordnen.

Das Prinzip dieser Aufgabe lässt sich auf viele andere Situationen übertragen:
In der 1. Phase sollen Schüler allein oder in Partnerarbeit die der Aufgabe innewohnende Vielfalt erzeugen. Die Vorsortierung kann dazu beitragen, dass in der späteren Gruppenarbeit unterschiedliche Vorstellungen aufeinander treffen.
In der 2. Phase findet die eigentliche Kooperation statt: In Kleingruppen muss in die Vielfalt eine Ordnung gebracht werden. Das Poster als Zielprodukt macht es notwenig, sich auf eine gemeinsame Gruppierung zu einigen und dazu (auch) mathematisch zu argumentieren.
In der 3. Phase muss jede Gruppe ihr Produkt mit denen der anderen vergleichen und vertreten. Hier kann der Lehrer intervenieren und vorsichtig die Perspektive der angestrebten Begriffsbildung einbringen (sollte aber ggf. auch abweichende oder alternative Begriffsbildungen zulassen). Die abschließende Kooperation im Klassengespräch kann die Lehrperson nutzen, um kooperatives Verhalten bei einem solchen Einigungsprozess modellhaft darzustellen.

Der hier dargestellte kooperative Begriffsbildungsprozess zeigt, wie Schülerinnen und Schüler in hohem Maße Akteure der Begriffsbildung sein können, und wie nicht extern vorbestimmte Ergebnisse, sondern die soziale Aushandlung die Ergebnisse bestimmt.

Projektartiges Arbeiten

Ein aktiveres kooperatives Arbeiten stellt sich ein, wenn Schülerinnen und Schüler innerhalb einer Gruppe über Gewichtung und Verteilung verschiedener Ansätze selbst entscheiden müssen. Notwendig hierfür sind Probleme, die hinreichend offen sind für verschiedene Ansätze und hinreichend komplex, um Arbeitsteilung günstig erscheinen zu lassen. Genau diese Vorzüge bringen Formen des projektartigen Arbeitens mit. Ein typisches Charakteristikum für eine Projektarbeit ist die Orientierung an einem gemeinsam zu verfertigenden Produkt. Dieses gemeinsame Produktziel kann der Motor für ein kooperatives Vorgehen sein und macht oft Arbeitsteilung und Abstimmung auf natürliche Weise nötig.

Beispielaufgabe: Werbung mit Zahlen

1.
Die Firma Braun hat damit geworben, dass ein Mann in 18 Monaten eine Bartfläche rasiert, die einem Fußballfeld entspricht. Die Werbung ist beim Verbraucher gut angekommen. Untersucht die Werbung mathematisch.

2.
Die Firma Braun begründet ihre Werbung mit folgender Rechnung:

Die Größe eines Fußballfelds beträgt mindestens 90x45 m, wir gehen von 90x50 m aus. Das entspricht einer Fläche von 45.000.000 cm^2. Die Hautfläche im Gesicht, die täglich rasiert werden muss, beträgt ca. 480 cm^2. Diese Fläche wird pro Rasur sieben Mal überstrichen (die Scherfolie berührt ein Stück Haut nicht nur einmal), und zwar jeden Tag, 18 Monate lang. Und: Auf der Haut wachsen durchschnittlich 50 Haare pro cm^2, auf dem Fußballrasen sind es nur zwei Grashalme pro cm^2.

Die Formel zur Berechnung lautet:

480	cm^2 Haut
x 7	mehrfaches Überstreichen pro Rasur
x 30	Tage im Monat
x 18	Monate
x 25	Faktor Haare pro cm^2/Grashalme pro cm^2

Summa summarum macht das exakt 45.360.000 cm^2

Ihr betreibt nun eine Werbeagentur und wollt für eine neue Automarke ein ähnliches Werbekonzept erstellen, bei dem auch Mathematik verwendet wird.

Die ursprüngliche Aufgabe – hier als Aufgabenteil 1– sieht „nur“ die Analyse der Situation vor (vgl. Laakmann 2005), die Kooperation der Schüler besteht in dem gemeinsamen Verfassen eines Briefes an die werbende Firma. In der hier vorgestellten Variante werden in Aufgabenteil 2 mit dem Werbekonzept ein eigenes Produkt verlangt und die Zusammenarbeit und das Argumentieren innerhalb der Gruppe noch weiter gehend gefordert. Das Ziel, mit dem gemeinsamen Produkt besonders gut dazustehen, kann zu einer positiven, die Kooperation fördernden Abhängigkeit in der Gruppe führen. So etwas geht besonders gut, wenn das Ergebnis nicht nach richtig und falsch zu werten ist, sondern wenn jeder in der Gruppe die Gelegenheit hat, zur Qualität des Produktes beitragen zu können.

Soll bei solchen Aufgaben den Schülerinnen und Schülern noch mehr Gelegenheit zum Argumentieren gegeben werden und will die Lehrkraft noch stärker zurückstehen, kann man den Lernenden auch bestimmte Rollen vorschlagen.

Phase 1: (wie oben) Sammeln von Ideen und Festlegung der Arbeitsteilung
Phase 2: (wie oben) Erarbeitung von Lösungen in Gruppen.
Phase 3: In jeder Gruppe werden Lose gezogen: ein Schüler wird zum Ergebnisbewerter, die anderen werden zu Ergebnispräsentatoren. Dann werden die Gruppen neu zusammengesetzt. Die Ergebnisbewerter bleiben am Gruppenplatz, die Ergebnispräsentatoren werden alle zu verschiedenen Ergebnisberwerten zugelost. Organisatorisch kann man dies mit einer Art Gruppenpuzzle bewerkstelligen (s. im letzten Abschnitt dieses Beitrags), es funktioniert aber auch einfacher, wenn die Ergebnispräsentatoren sich einfach selbstständig darauf einigen, wer zu welchem Gruppentisch geht. (Man muss nicht darauf dringen, dass jede neue Gruppe genau paritätisch zusammengesetzt ist). Nun müssen die Ergebnisbewerter sich die verschiedenen Präsentationen anhören.

Phase 4: Die Ergebnisbewerter nennen vor der Klasse, welche Lösung sie am meisten überzeugt hat und begründen dies.

Während geeignete Fragestellungen für jüngere Schüler vor allem leicht zugänglich sein müssen und die Arbeitsteilung dabei explizit in der Aufgabenstellung nahe gelegt werden kann, erwartet man von älteren Schülern auch die Bearbeitung komplexerer Probleme, sie werden z.B. zu „Gutachtern", deren Expertise zu einem dargelegten Sachverhalt angefordert wird. Dann müssen sie Ergebnisse nicht nur überzeugend herleiten, sondern auch noch ebenso überzeugend darstellen oder präsentieren. Solche „Gutachteraufgaben" findet man z.B. unter den niederländischen A-lympiade Aufgaben (www.alympiade.de) oder bei Mersch (2005). Sie sind Anlässe für kooperative Problemlöse- und Modellierungsprozesse:

Beispielaufgabe: Die Firma *Siebenkraut* hat einen neuen Markt aufgetan: Die Japaner entwickeln einen Heißhunger auf deutsches Sauerkraut. Siebenkraut beauftragt eine Überseespedition mit der Kalkulation des Sauerkrauttransportes. Das Sauerkraut soll in Weißblechdosen verpackt auf genormten Europaletten im Container verschifft werden. Der Leiter der Verpackungsabteilung gibt an, dass er zylinderförmige Dosen in beliebiger Größe herstellen kann. Fertigt für die Firma ein Gutachten an, aus dem hervorgeht:

- welche Stapelmöglichkeiten für die Dosen auf der Europaletten es gibt
- welche Dosenformate möglich sind und wie Verpackungspreis und transportierbare Sauerkrautmenge vom Dosenformat abhängen.
- mit welchem Verpackungsgewicht und -volumen für den Containertransport zu rechnen ist.

(vgl. Leuders 2005a)

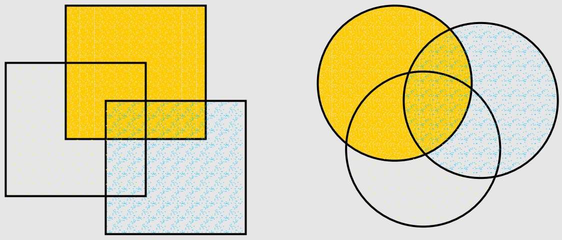
(3) Schüler stellen sich gegenseitig Aufgaben

Die Aufgaben, die im Mathematikunterricht gestellt werden, kommen eigentlich viel zu häufig von der Lehrkraft oder aus dem Schulbuch. Bestenfalls können Schülerinnen und Schüler geleitet Entdeckungen machen und vorausberechnete Fragen stellen. Viel zu selten lässt man sich darauf ein, dass die Lernenden echte Fragen aufwerfen, vielleicht auch solche, deren Beantwortbarkeit nicht vorab gesichert werden kann. Dabei birgt diese Form der Interaktion zwischen Lernenden eine Chance für ein gemeinsam gestaltetes Lernen. Im Folgenden werden mögliche Unterrichtssituationen dargestellt, in denen Schülerinnen und Schüler der Motor des Unterrichts werden, indem sie sich gegenseitig Fragen stellen.

Aufgaben selbst stellen in Entdeckungsphasen

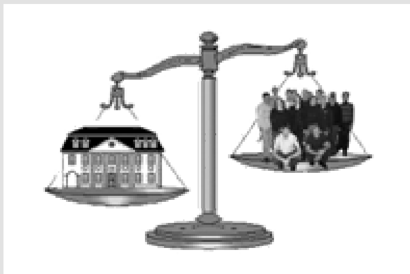
Es braucht keinen Mathematiker, um unerwartete Entdeckungen zu machen. Auch Schülerinnen und Schüler können zu mathematisch Forschenden werden, Fragen aufwerfen und gemeinsam an deren Lösung arbeiten. Dazu sind besonders solche Probleme geeignet, die sehr offen sind und viele verschiedene Fragen zulassen (s.o.), wie etwa die folgende

Beispielaufgabe:
Stell dir eigene Aufgaben, bei denen es darum geht, auf welche Weise sich die Figuren schneiden. Also z.B. wie oft, welche Anzahl oder Form die Schnittgebiete haben usw. Nimm Kreise, Quadrate, Rechtecke,… wie immer du willst.



Auch in außermathematischen Situationen können Schülerinnen und Schüler eigene Aufgaben erfinden. Besonders geeignet sind dazu solche Situationen, in denen man so genannte „Fermifragen“ stellen kann (Herget/Jahnke/Kroll 2001, Leuders 2001, Büchter/Leuders 2005):

Beispielaufgabe „Schulforschung“



- Welcher Lehrer redet am meisten?
- Wie viele Kilometer Weg legt ein Lehrer im Schulgebäude pro Tag zurück?
- Was ist eigentlich schwerer? Alle Lehrerinnen und Lehrer der Schule zusammen? Oder alle Schülerinnen und Schüler zusammen? Oder alle Schulbücher in der Schule? Oder alle Tische und Stühle?
- Denkt euch eine eigene Frage aus, die ihr erforschen könnt.

Gerade für jüngere Schülerinnen und Schüler ist es besonders wichtig, dass Sie Modelle und Beispiele haben, wie sie beim Stellen eigener Aufgaben vorgehen können. Als eine praktikable Form der „sanften Anleitung“ hat sich dabei das Prinzip der Aufgabenvariation erwiesen (Schupp 2002, Weth 1999). Schülerinnen und Schüler gehen dabei von einem gelösten Problem aus und variieren dieses, durch Verändern, Ersetzen, Hinzufügen oder Wegnehmen von einzelnen Teilen der Problemsituation oder der Fragestellung. So wird aus der Aufgabe *„Schneide aus einem Quadrat vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.“* z.B. eines der folgenden Probleme: *„Schneide aus einem Quadrat vier* ***beliebige*** *Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.“, „Schneide aus einem* ***Rechteck*** *vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.“, „Schneide aus einem* ***Kreis*** *vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.“ usw.* Dieses operative Spiel mit errungenen Produkten ist kennzeichnend für die Prozesse mathematischen Erkenntnisgewinns. Es kann aber ebenso in der Schule stattfinden, wenn geeignete Aufgaben und eine unterstützende Lernkultur zur Verfügung stehen.

Allein das Aufgabenstellen in Entdeckungsphasen führt noch nicht zu kooperativem Lernen. Dazu bedarf es angemessener methodischer Arrangements. Eines könnte z.B. so aussehen:

1. Phase: Probleme erfinden.
Alle Schülerinnen und Schüler erfinden eigene Probleme. In solchen kreativen Phasen kommt es vor allem auf Vielfalt und Bewertungsaufschub an. Diese Bedingungen werden unterstützt durch die Organisationsform des **stummen Schreibgesprächs** (s. z. B. Gerbode/ Richter/ Schluckebier 2005), bei dem die Schülerinnen und Schüler ausschließlich schriftlich auf ausliegenden größeren Zetteln kommunizieren. Auf den Kopf oder in die Mitte wird die Ausgangssituation notiert, z.B. eines der beiden hier beschriebenen Beispiele. Die Schülerinnen und Schüler reichen nun diese Zettel durch oder wandern zwischen ihnen hin und her und notieren um die Ausgangssituation herum bzw. darunter ihre Ideen. Da sie bald immer schon Ideen ihrer Vorgänge auf dem Zettel finden, können sie sich dabei auch durch diese anregen lassen.

2. Phase: Probleme sammeln und sortieren.
Die gefundenen Aufgaben bzw. Fragestellungen werden abgetrennt und an der Tafel systematisch sortiert. Die gesamte Zahl an Aufgaben ist nun das „Forschungsvorhaben“, das die Schülerinnen und Schüler in Gruppen arbeitsteilig angehen.
3. Phase: Lösungsversuche anstellen, ggf. Probleme lösen.
4. Phase: Lösungen zusammentragen und auswerten
„Was haben wir insgesamt über die Ausgangssituation gelernt? Was hat jede Gruppe beigetragen?“

Aufgaben stellen in Übungsphasen

Die vorstehend beschriebene Weise des Aufgabenstellens kann zu interessanten aber auch schwer lösbaren Fragen führen. Schülerinnen und Schüler können aber auch in einfacheren Situationen, etwa wenn es um Üben von Fertigkeiten geht, einander Aufgaben stellen. Hier ein Beispiel, wie eine Aufgabe zum produktiven Üben der Addition um „Erstellungsaufträge“ (Aufgabenteil g) erweitern werden kann:

Beispielaufgabe:
Bilde Additionsaufgaben. In jedem Kästchen soll eine der Ziffern 1,2,3,4,5,6,7,8 oder 9 stehen. Aber Achtung: Du darfst keine Ziffer doppelt verwenden!

a) □□ + □□ = 99	b)123 + 65 = □□□	c) 1□ + □1 = 50
d) 123 + □□□ = 912	e) □□□ + □□□ = 999	f) □□□ + □□□ = □□□

g) Schreibt eigene Aufgaben auf und stellt sie euch gegenseitig

Während beim Erstellen von Fragestellungen in Entdeckungsphasen es möglich, ja sogar gewünscht ist, dass auch schwierige, nur näherungsweise lösbare oder sogar unlösbare Probleme entstehen, möchte man in Übungsphasen möglichst sicherstellen, dass alle Lernenden ihre Fähigkeiten sichern bzw. vertiefen können. Wenn also in einer solchen Phase Schülerinnen und Schüler nicht nur vorgegebene Aufgaben bearbeiten sollen, sondern eigene Aufgaben für die Gegenseitige Bearbeitung erstellen, sollte man einige Aspekte beachten:

- Es sollte den Schülerinnen und Schülern möglichst transparent gemacht werden, in welchem Rahmen variiert werden kann bzw. soll.
- Bevor Schüler ihre Aufgaben weiter geben, sollten sie sie darauf überprüfen, ob sie lösbar sind und ggf: schon zuvor Lösungen selbst erstellen (aber diese zunächst zurückhalten).
- Im Anschluss an die Bearbeitung sollen Aufgabensteller und Aufgabenlöser sich über die gefundenen Lösungen austauschen.

Der besondere Reiz an einem solchen aktiven Erstellen von Übungsaufgaben liegt nicht nur auf Seiten des kooperativen Übens, sondern auch darin, dass das Stellen von Aufgaben Schülerinnen und Schüler zu Reflexionen anregt, die über das reine Abarbeiten hinausgeht – vor allem die Reflexion über Bedingungen der Lösbarkeit einer Aufgabe oder über deren Schwierigkeitsniveau und die Gründe dafür (im obigen Problem z.B. „Die Aufgabe kann man direkt rechnen“, „Hier muss man probieren“, „Hier hat man sehr viele Möglichkeiten“, „Hier gibt es einen Übertrag“).

Aufgaben stellen und weitergeben nach dem Prinzip „Stille Post“

Zu einer einfachen, aber gewitzten methodische Gestaltung von kooperativen Übungsphasen regt das Spiel „Stille Post“ an. Immer dann, wenn eine mathematische Situation verschiedene Darstellungsformen besitzt, kann man den Wechsel der Darstellung verwenden, um Aufgabenketten zu konstruieren, z.B. die folgende

1. Zeichne den Graph einer Funktion
2. Zeichne den Graphen der Ableitungsfunktion
3. Zeichne den Graphen einer Stammfunktion
4. Zeichne den Graphen der Ableitungsfunktion

usw. …

Jeder Schüler in einer Reihe erhält immer nur einen Zettel. Sobald er den Zettel des Vorgängers bekommt, nimmt er die „Lösung“ des Vorgängers als Ausgangspunkt für die Bearbeitung des eigenen Zettels. Nur diesen gibt er dann an den nächsten Nachbarn weiter.
Schließlich findet man sich in Gruppen wieder und tauscht sich über die beobachteten Phänomene und Irritationen aus: „Welche Fehler wurden gemacht? Warum? Welche Veränderungen sind niemandem anzulasten? Warum?“

Eine andere solche Aufgabe könnte z.B. lauten:

1. Wähle einen Term (z.B. 12x-5=0)
2. Schreibe zu diesem Term eine Aufgabe, die auf den Term führt
3. Stelle zu dieser Aufgabe einen Term auf
4. Schreibe zu diesem Term eine Aufgabe, die auf den Term führt.

usw…

Natürlich kann diese Aufgabe auch schon in früheren Schuljahren durchführen, wenn man beispielsweise zwischen Rechenausdruck (ohne Variablen) und Rechengeschichte wechselt, oder zwischen Divisionsaufgabe mit Rest und passender Realsituation.

(4) Experimente

In besonderem Maße regen Experimente zum kooperativen Arbeiten an, vor allem dann, wenn die Mitarbeit aller Teilnehmer einer Gruppe für die erfolgreiche Durchführung benötigt wird. Hier wieder ein Beispiel für positive gegenseitige Abhängigkeit. Experimente im Mathematikunterricht sind leider nicht allzu häufig, obwohl man sie viel öfter durchführen könnte. Ein oft anzutreffender Anlass für Experimente sind sicherlich stochastische Situationen. Aber auch eher physikalische Experimente eignen sich zur Verankerung mathematischer Begriffsbildung.

Beispielaufgabe:
Wie brennt eine Kerze mit der Zeit ab. Versuche den Vorgang mathematisch zu erfassen, so dass du bei Kerzen auch ohne sie anzuzünden, Prognosen machen kannst.

(nach U. Brauner)

(5) Spiele

Spiele sind in besonderem Maße geeignet, soziales Lernen mit fachlichem Lernen zu verbinden. Die Kernfrage lautet: Auf welche Weise ist das Spielen mit dem Mathematiktreiben verbunden?
Es gibt Übungsspiele, bei denen das Einüben mathematischer Fertigkeiten in ein den Schülern bekanntes oder auch eigens erfundenes Regelsystem gegossen wurde. Solche Spiele verbinden soziales Lernen mit Mathematiklernen auf einer eher oberflächlichen Ebene. Dabei kann es sein, dass das Spiel nur als unterhaltsame Verpackung dient oder aber dass die Regeln des Spiels sich als besonders geeignet für den angestrebten Lerneffekt erweisen. Das Memoryspiel mit *Rechenaufgaben und Lösungen* auf den Karten zählt wohl zur ersten Sorte. Wenn jedoch *geometrische Formen und entsprechende Gegenstände der Umwelt* abgebildet sind, wird entsprechend der Memoryregeln das Erfassen und Assoziieren von konkreten und abstrakten Formen geübt.

Ein weiteres Beispiel für ein Spiel, das der populären Spielwelt abgeschaut ist, aber mehr ist als nur gefällige Verpackung für eine mathematische Tätigkeit ist wohl dieses:

Beispielaufgabe: Stadt, Land, Fluss – einmal anders…

Jeder benötigt eine solche Tabelle im Heft. Die folgende Zeile mit Wörtern, die alle mit A beginnen, ist nur ein Beispiel.

Buchstabe	Dinge, die etwa 1cm groß sind	Dinge, die etwa 10cm groß sind	Dinge, die etwa 1m groß sind	Dinge, die etwa 10m groß sind
A	*Ameise*	*Ast*	*Affe*	*Auto*

Der oder die erste in der Runde geht im Kopf das Alphabet durch, der zweite ruft „Stopp“ und mit dem Buchstaben, bei dem stehen geblieben wurde, wird die Runde gespielt. Jeder muss nun für jede Spalte ein Ding mit diesem Anfangsbuchstaben finden. Wer zuerst fertig ist ruft „Stopp“, dann wird gezählt: Für jedes gefundene Wort gibt es

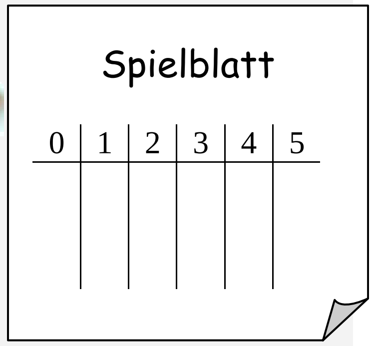
- einen Punkt, wenn mehrere Mitspieler darauf gekommen sind und
- zwei Punkte, wenn nur einer das Wort gefunden hat.

Wenn ihr euch nicht einig seid, ob ein Wort gelten soll, könnt ihr abstimmen. Ihr könnt die Tabelle auch erweitern oder nach anderen Dingen suchen, z.B. Dinge, die etwa 10kg schwer sind.

Der besondere Reiz liegt darin, dass Schülerinnen und Schüler hier beständig über die Zulässigkeit einer Lösung diskutieren müssen und dabei in jedem Fall wieder gezwungen sind, einen Konsens zu finden, um weiter spielen zu können. Das Spiel übt also nicht nur Größenvorstellungen sondern stellt eine starke Herausforderung an die Toleranz und Verständigung in einer Spielgruppe dar.

Mit einem ganz anderen Typ von Spielen hat man es bei dem folgenden Beispiel zu tun (nach SINUS 2006, ähnliche Ansätze aus der Stochastik findet man z.B. bei Büchter 2005, Leuders 2005b)

Beispielaufgabe: Differenz trifft
Spieler: 2 bis 4
Alter: ab Klasse 7
Benötigt werden: 2 Würfel, ein Spielblatt für jeden Spieler, 18 Chips pro Spieler



Spielanleitung: Jeder Spieler verteilt seine 18 Chips auf die Spalten nach seiner Wahl. Es wird reihum jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt. Der jüngste Spieler beginnt. Das Ergebnis eines Wurfes ist die Differenz der Augenzahlen. Wenn die Differenz z.B. 3 beträgt, so wird ein Chip aus der Spalte „3“ entfernt. Befindet sich dort kein Chip, dann hat man Pech. Gewonnen hat, wer zuerst alle Chips abgeräumt hat.

Phase 1: (in einer Gruppe) Spielt das Spiel einige Male hintereinander.
Phase 2: (in der Gruppe) Lässt sich erkennen, wer am ehesten die meisten Chips abräumen kann? Habt ihr eine Vermutung, wie man am besten spielen sollte? Überprüft eure Vermutung, z.B. durch die systematische Untersuchung einiger Spiele. Diskutiert in der Gruppe, welche Spielstrategie euch am günstigsten erscheint.
Phase 3: (zwischen Gruppen) Tretet mit eurer Strategie gegen andere Gruppen an.
Phase 4: (in der Klasse) Stellt euer Gruppenergebnis gemeinsam der ganzen Klasse vor.

Was dieses Spiel von den vorherigen Beispielen unterscheidet, ist die Tatsache, dass hier die Regeln und die daraus resultierenden Gesetzmäßigkeiten des Spiels zu mathematischen Untersuchungen Anlass geben. Noch dazu wird die Untersuchung der Regeln nicht allein von außen auferlegt, sondern kann auf natürliche Weise aus dem Wunsch entstehen, bei dem Spiel gewinnen zu wollen. Dieses Arrangement lässt sich bei vielen strategischen Konkurrenzspielen anwenden. Aus der Konkurrenz zwischen den Mannschaften entsteht eine Kooperation innerhalb der Teams.

Phase 1: (in der Gruppe) Spielerisches Ausprobieren
Phase 2: (in der Gruppe) Erforschen des Spiels: Zu welchen Ergebnissen führen die Regeln? Wie sieht eine optimale Gewinnstrategie aus?
Phase 3: (zwischen Gruppen) Ausprobieren der Gewinnstrategie. Küren der „empirisch“ besten Strategie
Phase 4: (in der Klasse oder im Gruppenpuzzle, s.u.) Reflexion der Strategien, Systematisieren der Erkenntnisse

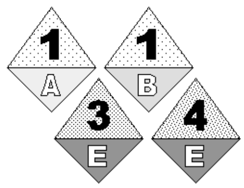
(6) Schüler als Lehrer

Zu den Arbeitsformen mit hoher Schüleraktivität und geringer Lehrerlenkung, die sich immer größerer Beliebtheit erfreuen, gehört das so genannte Gruppenpuzzle (Frey/Frey-Elling 1999 und *„The jigsaw classroom“* von ARONSON 1978). Ein erfolgreiches Gruppenpuzzle legt ein hohes Maß der Verantwortung für den eigenen Lernprozess und den der anderen in die Hände der Schülerinnen und Schüler. Da das Gruppenpuzzle eine relativ komplexe Organisationsform ist, soll zunächst ein Beispiel diese illustrieren (vgl. Leuders 2001 – „Ein Gruppenpuzzle aus Schülersicht“)

Phase 0 – Organisation und Erläuterungen von Ablauf und Zeitplanung

Der Umfang dieser Einführungsphase hängt von den Vorerfahrungen der Schüler mit dieser Methode ab. Die Informationen, die u. a. verbindliche Angaben zum Zeitrahmen enthalten sollten, können auch schriftlich gegeben werden. Jeder Schüler erhält für die Gruppenzuordnung ein ‚Puzzleteil‘ von 1-A bis 4-E.

Phase 1 – Individuelles Lernen



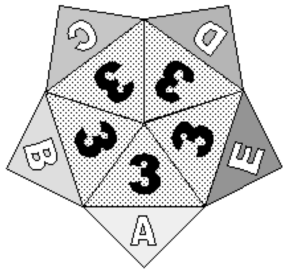
Die Tätigkeiten in dieser Phase hängen stark von der Funktion des Gruppenpuzzles ab:

- In Gruppenpuzzles, bei denen die Schüler **Wissen erwerben** sollen, müssen sie erst Informationen aufnehmen und verarbeiten. Es braucht also eine Phase konzentrierten individuellen Lernens – dies kann auch in der Hausaufgabe geschehen.
- In Gruppenpuzzles, in denen Schüler bei der Einführung in ein neues Thema hauptsächlich vorhandene **Vorerfahrungen aktivieren** (z.B. aus dem Alltag) sollen, kann diese Phase sich darauf reduzieren, dass jeder seine Erfahrungen zuerst stichpunktartig zusammenträgt, um sie in der ersten Gruppenbegegnung einzubringen.
- In Gruppenpuzzles, bei denen es um das **Wiederholen und Aufarbeiten vorhandener Kenntnisse** geht, kann vor der Phase 0 von allen Schülern ein Test durchgeführt und ausgewertet werden. Aus den aufgedeckten Wissenslücken ergeben sich dann erst die Puzzlethemen (z.B. quadratische Gleichungen lösen, Exponentialgleichungen lösen, Graphen zu Parabeln lesen und zeichnen, Graphen zu Exponentialfunktionen lesen und zeichnen), die in der Phase 1 dann zunächst individuell aufgearbeitet werden können.

Das vom Lehrer bereitgestellte Material für diese Phase kann enthalten:

- Eine Anleitung, die vorweg die Lernziele beschreibt
- Arbeitsmaterial (Beispielaufgaben, Texte, Zeichnungen...)
- Kontrollfragen/aufgaben (zur Selbstkontrolle, inwieweit Lernziele der Phase erreicht sind, oder was in der Gruppenphase noch aufgearbeitet werden muss)

Phase 2 – Expertentraining

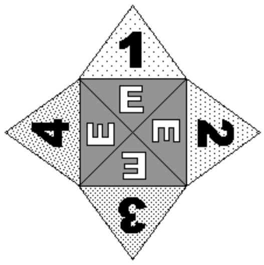


Nun setzen sich alle Schülerinnen und Schüler in Gruppen mit gleichem Thema, also gleicher Nummer zusammen. Ziel der Phase ist es, in der Gruppe

- ein (gemeinsames) Verständnis des Themas herzustellen, indem Schülerinnen im Dialog besondere Schwierigkeiten und ergänzende Perspektiven zusammentragen und Unklarheiten (durch gegenseitiges Erklären) beseitigen
- das Thema für die nächste Phase so aufzubreiten, dass die Mitschüler etwas davon haben, die wichtigsten Aspekte herausstellen, evtl. erkannte Hürden schneller überspringen
- die Vorgehensweise bei der Vermittlung zu planen, also z.B. zu entscheiden, wie die Inhalte den Mitschülern vermittelt werden (Vortrag, Grafik, Text) oder ob es für die Mitschüler eine Übungs- oder Testphase geben soll.

Das vom Lehrer bereitgestellte Material für diese Phase kann schriftliche Hilfestellungen zur Vorgehensweise, insbesondere zur Zeitplanung, enthalten, z.B.: „*Fasst das Wesentliche zu Anfang zusammen: Worum geht's? Macht eine Zeichnung. Sollen die Zuhörer mitschreiben? Wollt ihr Rückfragen zulassen oder erst am Ende beantworten? Denkt euch Kontrollfragen aus, um festzustellen, ob die anderen eure Erklärungen wirklich verstanden haben.*“

Phase 3 – Unterrichtsrunde



Die Gruppen werden neu zusammengestellt. Jetzt treffen sich alle Schüler, die denselben Buchstaben haben. In jeder Gruppe befindet sich nun zu jedem Thema ein Experte bzw. eine Expertin. Reihum erhält jeder dieselbe Zeit, um auf der Grundlage der Überlegungen seiner Expertenrunde alle anderen über sein Wissensgebiet zu informieren.

Phase 4 – Plenum

Hier gibt es viele Möglichkeiten, die Arbeit zu beschließen:

- Eine **Manöverkritik** aller Beteiligten empfiehlt sich besonders dann, wenn die Methode für den Lehrer und/oder die Schüler noch neu ist. So geraten weitere Puzzleversuche erfreulicher und ergebnisreicher.
- Eine **Ergebnisüberprüfung** im Klassenverband kann stichpunktartig durch mündliche Kontrollfragen geschehen.
- Etwas verbindlicher ist eine (im Voraus angekündigte) *individuelle* **schriftliche Überprüfung**. Dadurch wird die Arbeitsform tatsächlich zum „Ernstfall Lernen“.

Einer solchen Organisationsform spricht man die folgenden Vorzüge zu:

- Schülerinnen und Schüler werden in aktiver Auseinandersetzung mit einem Thema zu Experten und übernehmen gegenüber den Mitschülern die Lehrerrolle, sie „Lernen durch Lehren“
- Das Ergebnis der ersten Gruppenphase muss vom Einzelnen individuell (und ohne Rückhalt bei stärkeren Mitschülern) in die zweite Phase weiter getragen werden, daher besteht eine höhere individuelle Mitverantwortung für das Gruppenergebnis
- Diese Verantwortung befördert auch eine höhere Schüleraktivierung in der Gruppe als bei unstrukturierter Gruppenarbeit, bei der einzelne Schüler sich leichter hinter andere zurückziehen können.

Eine Voraussetzung für die Durchführung eines Gruppenpuzzles ist, dass das Thema in **Teilthemen mit ähnlichen Anforderungen** aufgeteilt werden kann, ohne dass sich die Ergebnisse der Expertengruppenarbeit zu sehr überschneiden. Hierarchische aufgebaute Themen eignen sich weniger. Die Themen müssen von Schülern selbstständig erarbeitet und weitergegeben werden können. Obwohl es grundsätzlich richtig ist, Schülern etwas zuzutrauen, muss man die Eignung von Problemen jeweils sorgsam abwägen.

Es wird oft betont, dass das Gruppenpuzzle eher zur Erarbeitung von Faktenwissen als für entdeckendes Lernen geeignet ist. Das hieße jedoch das Gruppenpuzzle zu Lernrunden zu degradieren. Auch das Problemlösen oder das Entwickeln von Begriffen kann man in Form von Gruppenpuzzlen gestalten:

- Jede Expertengruppe bearbeitet und **löst ein ähnliches mathematisches Problem** und stellt den anderen in der Unterrichtsrunde das Problem und die Problemlösung vor. Beispiele für solche Probleme könnten sein: die Modellierung und Optimierung von Handytarifen, die Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung des Abstandes zwischen verschiedenen ebenen mathematischen Figuren, die Bestimmung von unbekannten Größen in einem Dreieck usw. Dann löst zwar jeder nur ein Problem und rezipiert zwei bis vier andere. Wenn die Probleme jedoch verwandt sind, so hat jeder aufgrund der eigenen Erfahrungen die Möglichkeit, die gelösten Beispiele zu verstehen und mit dem eigenen zu vergleichen. Im nachfolgenden Klassunterricht findet dann ein systematischer Methodenvergleich oder eine Feststellung der Reichweite der eingesetzten Methode statt.

- Jede Expertengruppe **bearbeitet einen anderen mathematischen Begriff oder ein mathematisches Verfahren**, lernt ihn bzw. es kennen und findet Beispiele und Anwendungen. Beispiele für solche Begriffe oder Verfahren könnten sein: Zahlen in unterschiedlicher Darstellung, Einteilung von Funktionen in Gruppen anhand ihres graphischen Verlaufes usw. In der Unterrichtsrunde treffen diese Begriffe und Verfahren dann aufeinander und können verglichen werden. Damit hat der Lehrer, bevor er im Klassenverband, die Ergebnisse zusammenführt und systematisiert, bereits die Phase des Erfahrungsaustausches und einen Teil der Strukturierungsarbeit an die Schüler abgegeben.

- Jede Expertengruppe **findet zu verschiedenen (verwandten) Realsituationen ein mathematisches Modell**, und bearbeitet damit die Situation. Die Situationen sollten dann mit ähnlichen oder zumindest vergleichbaren Modellen zu bearbeiten sein.

In den bisherigen Beispielen bekamen die Expertengruppen **unterschiedliche Aufträge**, diese wurden sorgfältig durch den Lehrer ausgewählt und in Schwierigkeit und Gehalt möglichst gleich bzw. sogar der jeweiligen Gruppe angemessen gewichtet. Dies ist besonders hilfreich, wenn man die Gegenüberstellung verschiedener Verfahren im Unterricht explizit ansteuern möchte.

Es ist aber auch möglich, **zielgleiche Aufträge** zu erteilen, wenn die Probleme bzw. Situationen hinreichend offen sind, so dass es in der Arbeit der Expertengruppen zwangsläufig zu Divergenzen kommt. Für diese zielgleiche Arbeit eignen sich besonders Fermi-Aufgaben und ergebnisoffene Aufgabenstellungen

In jedem Fall dürfen die Aufgaben (die Probleme, die Modellierungssituationen, die Begriffe) für die einzelnen Gruppen nicht zu anspruchsvoll sein. Von den in einem anspruchsvoll geführten Klassengespräch erreichbaren kognitiven Leistungen muss man um Einiges abrücken und zugängliche und selbstständig erarbeitbare Aufträge stellen. Zu erarbeitende mathematische Begriffe sollen direkt auf der Anschauung fußen (ungeeignet ist z.B. der schillernde Stetigkeitsbegriff), mathematische Probleme sollten auch mit elementaren Mitteln zumindest teilweise zu bearbeiten sein (z.B. durch Probieren oder durch Untersuchung von Beispielen). Es sind also Aufgabenstellungen von hohem Differenzierungsvermögen gefragt. Die Schüler müssen mehrheitlich unbedingt in der Lage sein, die Themen selbstständig zu erarbeiten, da sich sonst Frustration breit macht. Dazu gehört auch eine transparente Formulierung von Lernzielen und Kontrollfragen, die den Schülern die Selbstkontrolle ihrer Lernprozesse ermöglicht. Die erhöhte Vorbereitungszeit lässt sich damit rechtfertigen, dass gute Materialien immer wieder verwendbar sind.

Sicherlich gibt es viele organisatorische Fragen zu klären: Wie gestaltet man ein Gruppenpuzzle mit 30, 27 oder 29 Schülern? Müssen es immer 4 Themen sein? Wie passen die einzelnen Phasen sinnvoll in das 45-Minuten Schema? Wie werden die Gruppen zusammengesetzt? (Freie Wahl oder Losentscheid?) Ab welchem Alter ist die Methode geeignet? All diese Fragen lassen sich mit etwas Fantasie und im konkreten Einzelfall klären.

Auch Gruppenpuzzlen will gelernt sein. Alle Beteiligten – Lehrer wie Schüler –müssen Erfahrungen sammeln, Eindrücke zurückmelden und das Verfahren kontinuierlich entwickeln können. Man muss sich immer bewusst darüber bleiben, dass das Gruppenpuzzle auch nur eine Methode von vielen ist und nicht überstrapaziert werden darf.

Literatur

Becker, J.P. / Shimada, S. (Hrsg.) (1997): The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston VA: NCTM

Büchter, A. (2005): Ein Spiel mit merkwürdigen Würfeln? Praxis der Mathematik in der Schule 3/2005

Büchter, A. / Leuders, T. (2005): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Berlin: Cornelsen Scriptor

Dubs, R. (1996): Konstruktivismus: Einige Überlegungen aus der Sicht der Unterrichtsgestaltung. In: Zeitschrift für Pädagogik 6/1995, S. 889 – 903

Frey-Eiling, A./ Frey, K. (1999). Gruppenpuzzle. In: Wiechmann J. (Hrsg.), Zwölf Unterrichtsmethoden. Beltz, Weinheim, s.a. http://educeth.ethz.ch/didaktik/puzzle

Gallin, P./ Ruf, U. (1998): Dialogisches Lernen im Mathematikunterricht. Seelze-Velber: Kallmeyer

Gerbode B./ Richter, J./ Schluckebier, D. (2005) SIMSEN (SMS) im Mathematikunterricht – stumme Schreibgespräche. Praxis der Mathematik in der Schule 5/05

Gräber, W./Kleuker U. (1998): Entwicklung von Aufgaben für die Kooperation von Schülern, Erläuterungen zu Modul 8 des BLK-Modellversuch SINUS, http://sinus-transfer.uni-bayreuth.de (22.12.2005)

Green, N./Green, K. (2005) Kooperatives Lernen im Klassenraum und im Kollegium. Kallmeyer

Hefendehl-Hebeker, L. (2005): Perspektiven für einen künftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H./ Ralle, B./ Reiss, K./ Schön, H./ Vollmer, H. (Hrsg.): Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken. Innsbruck: Studienverlag

Herget, W./ Jahnke, T./ Kroll, W. (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen

Heymann, H.-W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Basel: Beltz

Johnson, D. W/ Johnson, R. T. (1989): Cooperation and competition: Theory and research. Edina, MN: Interaction Book Company.

Klippert H. (1998): Teamentwicklung im Klassenraum, Weinheim Basel 1998.

Laakmann, H. (2005): Werbung und Mathematik – oder: Rasiert man(n) in 18 Monaten ein Fußballfeld? Praxis der Mathematik in der Schule 3/05

Leuders, T. (2001): Qualität im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor

Leuders, T. (2005a): Denkzettel „Sauer macht erfinderisch“. In: Praxis der Mathematik in der Schule 3/05

Leuders, T. (2005b): Turf - Mit Glück und Strategie zum Helden der Rennbahn. Praxis der Mathematik in der Schule 3/2005

Mersch, B. (2005): Mit Gutachteraufgaben mathematisch argumentieren. In: Barzel/ Hußmann/Leuders (Hrsg.): Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor

Meyer, E. (1996): Gruppenunterricht – Grundlegung und Beispiel (9. Auflage). – Hohengehren:

Schupp, H. (2002): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

SINUS (2006): Konzepte und Aufgaben zur Sicherung von Basiskompetenzen. Projekt 1 im Rahmen von SINUS-Transfer NRW. Stuttgart: Klett

Weth, T. (1999): Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun. Franzbecker