BLK-Modellversuch

Steigerung der Effizienz des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Materialien zum Mathematikunterricht

November 1998

Elemente einer neuen Aufgabenkultur

Anregungen zu den Modulen 1 und 5

Peter Baptist, Bayreuth

Universität Bayreuth, Postfach 101251, 95440 Bayreuth

Vorbemerkung

> The best way to learn is to do – to ask, and to do.
> The best way to teach is to make students ask, and do.
> Don't preach facts – stimulate acts.

Dieser Appell des amerikanischen Mathematikers Paul HALMOS wendet sich nicht gegen einen lehrergeleiteten Unterricht, sondern gegen einen Unterricht, der die Schüler zur Passivität verurteilt. Denn nicht der *lehrergeleitete Unterricht*, sondern der eng geführte *fragend-entwickelnde Unterricht*, in dem anspruchsvolle und komplexe Problemstellungen in knappe Fragen und primitive Aufgaben portioniert und häppchenweise den Schülern serviert werden, schränkt die geistige Beweglichkeit und Eigenständigkeit der Schüler ein und behindert somit einen individuellen Aufbau von vernetztem Wissen. Wie können wir uns von einem solchen Unterricht, der in der Regel stromlinienförmig auf eine Lösung, auf ein Verfahren führt, lösen? Wie kommen wir von dem gesteuerten Ablauf zu einem eher offenen Ablauf? Als fließend erweisen sich die Grenzen zwischen einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch und einem *freien Unterrichtsgespräch*. Letzteres betont die Problemlöseprozesse und damit eigenständiges Arbeiten. Solche positiven Ansätze werden oftmals zunichte gemacht, indem die angesprochenen Probleme zu schnell durch fertige Beweisrezepte oder Musterlösungen abgehandelt werden. Den Schülern gibt man zu selten die Freiheit, eigene Wege auszuprobieren. Auch für den Lehrer sichtbar falsche Lösungsvorschläge sollten andiskutiert werden; dabei wäre gemeinsam zu klären, warum der falsch eingeschlagene Weg nicht zum Ziel führt. In einem problemorientierten Unterricht muß der Schüler auch lernen, neue Situationen zu erzeugen und mit diesen Situationen fertig zu werden. Es kann ihm so die Scheu vor ungewohnten Aufgabenstellungen genommen werden.

Im Rahmen von **Modul 1** werden beispielhaft einige Aufgaben vorgestellt, die mehrere Vorgehensweisen bzw. unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten zulassen. Es geht hier nicht um eine umfangreiche Aufgabensammlung, sondern an wenigen Beispielen werden wesentliche Aspekte aufgezeigt, die einen allgemeinbildenden aktiv-entdeckenden Unterricht prägen:

- Anleiten der Schüler zum eigenständigen Problemlösen.
- Vertrautwerden mit Fragetechniken und Heurismen.
- Herausarbeiten bzw. Bewußtmachen von Lösungsstrategien oder zugrundeliegenden Leitideen.
- Integration kulturgeschichtlicher Elemente.

Mit der Strategie RÜCKFÜHREN AUF EINEN BEKANNTEN FALL klopfen wir bei **Modul 5** an, denn *Aufbauen auf Bekanntes* macht deutlich, daß sich Lernanstrengungen lohnen. Die Schüler erkennen, daß sie früher Gelerntes benötigen, um zu neuen Erkenntnissen bzw. Ergebnissen zu gelangen. Diese Vorgehensweise ist geradezu typisch für den Mathematikunterricht, wir müssen sie lediglich den Schülern deutlicher machen.

So lassen sich beim Unterrichten mathematischer Inhalte gleichzeitig wichtige Denk- und Arbeitsweisen herauskristallisieren und bewußt machen. Dies bedeutet auch, daß die Qualität des Unterrichts nicht in erster Linie von dem Stoff abhängt, der unterrichtet wird, sondern von der Art und Weise, wie mit dem Stoff umgegangen wird. Als Orientierung können folgende Ziele bzw. Leitideen dienen:

- Mathematischer Inhalt ist wichtiger als mathematischer Formalismus.
- Mathematische Denkprozesse sind ebenso wichtig wie mathematische Ergebnisse.
- Das Entwickeln von Ideen ist ebenso wichtig wie das Prüfen und das Verifizieren von Aussagen.
- Die Qualität der Mathematik wird geprägt durch die Qualität der Ideen, nicht durch einen Mangel an Fehlern.
- Neugierde und das Stellen von Fragen bilden die Voraussetzung für Entdeckungen.
- Mathematikunterricht ist nicht als Vermittlung von leicht abprüfbarem Wissen und Können zu verstehen, sondern als aktiver, schöpferischer Prozeß.

Entscheidend für eine Steigerung der Effizienz des mathematischen Unterrichts ist, daß die genannten Anregungen nicht lediglich zu isolierten Einzelaktivitäten führen, sondern *systematisch* in den Unterricht einbezogen werden.

Das Ziel bestimmt die Methode

Wir blättern in dem Roman *Alice im Wunderland* [3] und treffen die ratlose Alice, die sich nicht mehr zurechtfindet. Etwas stockend fragt sie die in einem Baum sitzende Grinsekatze: “Würdest du mir bitte sagen, wie ich von hier aus weitergehen soll?” Die Katze antwortet: “Das hängt zum großen Teil davon ab, wohin du möchtest.”

Übertragen wir die geschilderte Situation auf die Schule, dann müssen wir fragen:

- Wohin möchten wir im Unterricht?
- Welches Ziel streben wir mit unseren Schülern an?

Zu den wichtigsten übergeordneten Lernzielen gehört die Fähigkeit, selbständig zu arbeiten. Wenn wir wirklich wollen, daß die Schüler selbständig werden, müssen sie bereits beim Lernen *Eigenständigkeit* erwerben. Der Unterricht darf daher nicht nur aus einem Vermitteln von Fakten und Ergebnissen bestehen, sondern die Schüler müssen so oft wie nur möglich Gelegenheiten bekommen, sich mit Aufgaben und Problemen zu befassen, die zu diesen Ergebnissen hinführen. Dies ist natürlich keine prinzipiell neue Erkenntnis. In seinem sehr empfehlenswerten Buch *Bildung und Mathematik* aus den 60er Jahren schreibt Alexander WITTENBERG [11]:

> Der wirkliche Gehalt des Unterrichts liegt nicht einfach im stofflichen Ergebnis, sondern in dem, was sich an der Erarbeitung desselben vollzieht.

Es genügt also bei weitem nicht, Schüler mit fertigen Lösungen und Ergebnissen, also reinen Fakten, vollzustopfen. Wer lernen soll, eigenständig zu arbeiten, der muß vor allem lernen, **wie** man Lösungen bzw. Ergebnisse erzielt. Hierin liegt eine wesentliche Aufgabe des Unterrichts. Sehr treffend hat dies u.a. Heinrich MANN (1871 - 1950) formuliert, der persönlich zur Schule und zu Lehrern ein gespanntes Verhältnis hatte. Obwohl vor über 100 Jahren niedergeschrieben, haben seine Gedanken m.E. nichts an Aktualität eingebüßt:

> Die “Schule” ist ein abstrakter Begriff; die konkreten Faktoren sind “Schüler” und “Lehrer” (...). Es kommt wohl überhaupt nicht darauf an, *was* man lehrt, sondern *wie* es gelehrt wird. Man kann, scheint mir, auch durch *klassische* Schulbildung recht gut auf modernes Leben vorbereitet werden; der Unterricht müßte nur danach sein!
>
> (Aus einem Brief an L. EWERS vom 9.6.1891.)

Was bedeutet das nun für den Unterricht? Wie können Schüler die notwendigen Strategien und Verfahren erlernen, die es ihnen dann ermöglichen, eigenständig (oder zumindest eigenständiger) zu arbeiten? Als die wohl effektivste Methode erweist sich hier eine Art “training on the job”. Das bedeutet:

- Keine Strategien isoliert für sich präsentieren.

- Die Schüler mit Aufgaben konfrontieren, an denen die entsprechenden Strategien herausgearbeitet werden.
- Diese Strategien müssen an geeignet gewählten Beispielen eingeübt und auf diese Weise eingeprägt werden.

Letztendlich soll angestrebt werden, daß diese Strategien auch in außermathematischen Situationen zur Verfügung stehen. Dies gelingt jedoch nur, wenn die Schüler in der Lage sind, ihre Kenntnisse den jeweiligen Erfordernissen anzupassen. Deshalb muß das vorhandene Wissen bereits im Unterricht in variierenden Kontexten angewandt werden. Ein feststellbarer Erfolg wird sich aber nur dann einstellen, wenn es sich bei dieser Art des Unterrichtens nicht lediglich um sporadische, sondern um *systematische* Bemühungen handelt.

Ein Abzählproblem – zwei unterschiedliche Lösungswege

Unsere obigen Vorgaben zum Erarbeiten von Strategien sollen nun an einem Beispiel konkretisiert werden. Daneben nehmen wir Bezug auf ein Ergebnis der TIMS-Studie:

> Der Leistungsrückstand deutscher Schülerinnen und Schüler gegenüber den Schülern leistungsstärkerer Länder wird besonders bei Aufgabenstellungen deutlich, die das mathematisch-naturwissenschaftliche Verständnis prüfen, flexible Anwendung des Gelernten verlangen oder ungewohnte Problemkonstellationen bieten.

> Wir betrachten ein Basketballturnier mit acht Mannschaften, das nach dem K.O.-System durchgeführt wird. Wie viele Spiele sind notwendig, um den Sieger zu ermitteln?

Lösung:	Erste Runde:	4 Spiele
	Zweite Runde:	2 Spiele
	Finale:	1 Spiel
		7 Spiele

Nachteil der Lösung:
Sie läßt sich nicht ohne weiteres auf beliebig viele Mannschaften anwenden.

Wie geht man vor, wenn z.B. 1729 Mannschaften am Turnier teilnehmen?
Lose werden gezogen, und eine Mannschaft hat in der ersten Runde ein Freilos. Die Gewinner kommen eine Runde weiter, und das Verfahren wird so lange

wiederholt, bis alle Mannschaften bis auf eine ein Spiel verloren haben. Diese Mannschaft gewinnt das Turnier. Wie viele Spiele wurden nun ausgetragen?

Obiger Lösungsweg ist somit nur sinnvoll, wenn die Anzahl der Teilnehmer am Turnier nicht allzu groß ist. Für sehr große Teilnehmerzahlen sollte man über einen anderen Lösungsweg nachdenken.

Wir stellen fest:

- Jedes Spiel hat genau einen Verlierer.
- Jede Mannschaft – außer dem Turniergewinner – verliert genau ein Spiel.

$\Rightarrow$ Es gibt genauso viele Spiele wie es verlierende Mannschaften gibt. D.h. die Anzahl der Spiele ist gleich der Anzahl der Verlierer.

Jetzt haben wir einen neuen, verblüffend einfachen Lösungsweg gefunden. Die Idee besteht lediglich darin, eine *eineindeutige Zuordnung* zwischen der Menge der Verlierer und der Menge der Spiele herzustellen. Das direkte Zählen der Spiele kann aufwendig sein, das Zählen der Verlierer ist trivial.

Unsere zweite, sehr elegante Lösung hängt von einer Begriffsbildung ab, die in vielen Bereichen der Mathematik anwendbar ist, nämlich von der eineindeutigen Zuordnung zwischen Mengen von Objekten. Diese Vorgehensweise ist nichts Aufregendes, auch nichts Neues. Denn wir verwenden diese Struktur automatisch beim Zählen. Man muß nur genau hinsehen.

Wenn wir beispielsweise die Bonbons in einer Tüte zählen wollen, dann führen wir genaugenommen eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Menge der Bonbons und einer Teilmenge der natürlichen Zahlen durch. Diese Zuordnung kann auf unterschiedliche Weise geschehen. Wir können z.B. jedes Bonbon mit einer Ziffer bzw. Zahl versehen. Das ist natürlich etwas mühselig. Statt dessen deuten wir eher mit einem Finger nacheinander auf die Bonbons und zählen $1, 2, 3, \ldots$ Anstelle des Fingerdeutens genügt es natürlich auch, wenn wir lediglich hinschauen.

Eine ganz selbstverständliche Angelegenheit über die man i.a. überhaupt nicht nachdenkt – nicht nachdenken braucht. Aber manchmal lohnt sich Nachdenken doch – denn diese eineindeutige Zuordnung entpuppt sich als äußerst *mächtiges Werkzeug*. Mit dieser Strategie bekommen wir *unendliche Mengen* in den Griff.

Ende des vergangenen Jahrhunderts hatte der deutsche Mathematiker Georg CANTOR (1845 - 1918) die entscheidende Idee, die die Mathematik veränderte. Cantor zeigte uns, daß wir unendliche Mengen durch eine verblüffend einfache, ja naive Betrachtungsweise handhaben können.

Wie heißt es so schön in dem Film *Die Feuerzangenbowle*, wenn es um die Erklärung der Dampfmaschine im Physikunterricht geht:

> "Stelle mer uns mal janz dumm".

Auch wenn uns das vielleicht schwerfällt, versuchen wir es einmal. Wir haben zwei Kisten mit Äpfeln und möchten wissen, in welcher Kiste sich mehr Äpfel befinden. Selbst wenn wir nicht Zählen können, läßt sich dieses Problem ohne Schwierigkeit lösen.

Wir nehmen gleichzeitig aus jeder Kiste einen Apfel und legen beide nebeneinander auf den Boden. Diese Vorgehensweise wiederholen wir so lange, bis mindestens eine der Kisten keine Äpfel mehr enthält. Jetzt wissen wir, ob die linke Kiste oder rechte Kiste einen größeren Inhalt hatte, oder ob beide gleichviele Äpfel enthielten.

Vergegenwärtigen wir uns nochmals die Vorgehensweise. Das gleichzeitige Entnehmen je eines Apfels aus den Kisten bedeutet physikalisch eine *eineindeutige Zuordnung* zwischen den Mengen der Äpfel in den Kisten. Und das ist alles.

Cantor macht nun dasselbe mit unendlichen Mengen, d.h. mit Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten.

> Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots$,
>
> und es gibt unendlich viele gerade Zahlen $2, 4, 6, 8, \ldots$.

Wir wissen, die geraden Zahlen sind eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Daher liegt die Ansicht nahe: Es gibt mehr natürliche als gerade Zahlen.

Jetzt greift Cantor in das Geschehen ein. "Nein", sagt er, "es gibt gleichviele natürliche Zahlen und gerade Zahlen".

Cantor behauptet dies nicht nur, er begründet auch seine Aussage – wie es sich für einen Mathematiker gehört. Zur Begründung arbeitet er mit demselben Verfahren, das wir bei dem Vergleich der Inhalte der Apfelkisten bereits verwendeten, d.h. wir betrachten die Elemente in den beiden Mengen *paarweise*. Das Paarebilden geschieht folgendermaßen: Wir bilden das Paar 1 mit 2, 2 mit 4, 3 mit 6 usw. *Allgemein:* n mit $2n$.

Dieser Paarebildungsprozeß erzeugt eine *eineindeutige Zuordnung* zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der geraden Zahlen. Folglich besitzen diese beiden unendlichen Mengen die gleiche Größe. Wir sagen auch: Beide Mengen sind gleichmächtig.

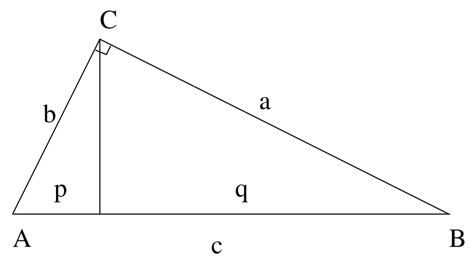
Ich erinnere an unser Startproblem: Basketballturnier.

Mit genau derselben Methode, mit der wir die Anzahl der Spiele in einem Basketballturnier bestimmen können, haben wir die Größe von unendlichen Mengen in den Griff bekommen. Dies zeigt eindrucksvoll die Bedeutung der *Strategie der eineindeutigen Zuordnung*.

Der Lehrsatz des Pythagoras – auf den Spuren von A. Clairaut

Der Lehrsatz des Pythagoras wird heutzutage in der Schule im Rahmen der Ähnlichkeitsgeometrie behandelt. Nach der Strategie *Wähle eine geeignete Hilfslinie* wird das rechtwinklige Ausgangsdreieck mit Hilfe der Höhe in rechtwinklige Teildreiecke unterteilt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt die bekannte Aussage.

Diesen Beweis führte bereits um 1150 der Inder BHASKARA (1114 - ?).



Bhaskara geht davon aus, daß die Seiten der Teildreiecke den Seiten des Ausgangsdreiecks proportional sind. Diese Proportionalität kannten und verwendeten bereits die Babylonier. Damit folgt dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{b} &= \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = p \cdot c \\ \frac{q}{a} &= \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = q \cdot c \end{aligned}\right\} a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2$$

In der westlichen Welt bekannt gemacht wurde dieser Beweis durch LEONARDO von Pisa (ca. 1170 - ca. 1240), der ihn in sein 1220/1221 erschienenes Buch *Practica Geometriae* aufgenommen hat. Besser bekannt ist uns Leonardo unter dem Namen FIBONACCI und durch seine Kaninchenaufgabe aus dem *Liber abbaci*.

Die skizzierte Vorgehensweise verschleiert allerdings die Tatsache, daß der Lehrsatz des Pythagoras eigentlich ein *Flächensatz* ist. Deshalb wählen wir einen anderen Zugang. Das Problem lautet:

> Aus zwei gegebenen Quadraten soll ein einziges flächengleiches Quadrat erzeugt werden.

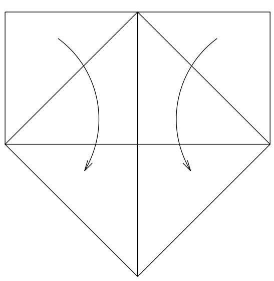
Wir werfen einen Blick zurück in das 18. Jahrhundert und orientieren uns an dem herausragenden französischen Mathematiker Alexis-Claude Clairaut (1713 - 1765), der u.a. zwei didaktisch orientierte Lehrbücher zur Einführung in die Algebra bzw. in die Geometrie verfaßt hat.

Nach Clairaut spielt nicht die Vermittlung von Ergebnissen, sondern es spielen die Überlegungen, die zu den Ergebnissen führen, die zentrale Rolle. Hier spürt man geradezu die geistige Übereinstimmung mit Wittenberg (vgl. Eingangszitat). Clairaut knüpft bei seinen Vorschlägen zur Einführung in die Geometrie an konkrete Tätigkeiten an, er möchte "die Anfänger interessieren und belehren". Dazu schlägt er einen pseudohistorischen Weg ein.

> "Ich habe bey mir gedacht, es müsse doch diese Wissenschaft, wie alle anderen, nach und nach entstanden seyn... und es könne dieser erste Fortgang unmöglich über den Verstand der Anfänger seyn, weil es ja Anfänger waren, welche ihn machten."

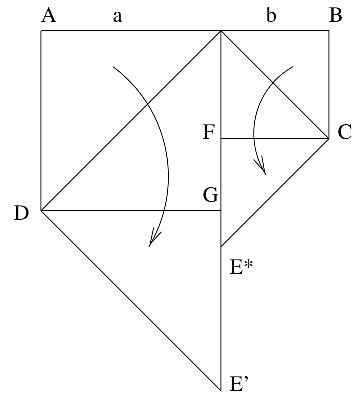
Die Lösungen der Probleme werden nicht sofort in voller Allgemeinheit vorgeführt, sondern schrittweise entwickelt und motiviert. Wir bezeichnen heute eine solche Darstellung als heuristisch-genetisch.

Der Zugang zum Lehrsatz des Pythagoras erfolgt bei Clairaut über das Problem, aus zwei gegebenen Quadraten ein einziges flächengleiches zu erzeugen. Er geht vor nach der Strategie: *Betrachte zunächst einen Spezialfall*:

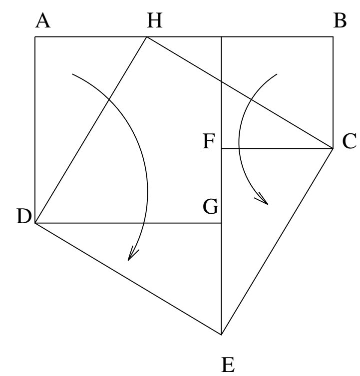


Zwei gleich große Quadrate sind gegeben. Diese werden durch je eine Diagonale in flächengleiche Dreiecke zerlegt. Geeignet zusammengesetzt ergeben diese Dreiecke ein Quadrat.
Auf dieser Stufe wird rein anschaulich gearbeitet, ohne strengen Beweis.

Wir wenden uns dem *allgemeinen Fall* zu, d.h. es sind zwei unterschiedlich große Quadrate mit den Seitenlängen a, b ($a > b$) gegeben. Läßt sich die Vorgehensweise vom Spezialfall übernehmen? Wir versuchen es. Folgt man direkt dem "Geist" der verwendeten Methode, so erhält man eine Figur, die sich nicht schließt. Wir müssen also unsere Strategie modifizieren.



Um eine geschlossene Figur analog zum Spezialfall der kongruenten Ausgangsquadrate zu erhalten, muß man versuchen, auf $[AB]$ einen Punkt H so zu finden, daß sich die Dreiecke DHA bzw. HCB bei Drehung um 90° um D bzw. C (im bzw. entgegen dem Uhrzeigersinn) auf der Verlängerung der gemeinsamen Quadratseite in einer "Spitze" $E = E^* = E'$ berühren.
(Bem.: Anstelle der Drehungen kann man natürlich auch mit Verschiebungen argumentieren.)



Die Strecke $[FE]$ setzt sich zusammen aus den Strecken $[FG]$ und $[GE]$ mit den Längen $(a - b)$ bzw. $\overline{AH}$. Aufgrund der Konstruktion gilt $\overline{FE} = \overline{HB}$, und daher erhalten wir:

$$\overline{HB} = (a - b) + \overline{AH}. \qquad (*)$$

Wegen $\overline{AH} + \overline{HB} = a + b$ folgt aus $(*)$:

$$a + b - \overline{AH} = a - b + \overline{AH},$$

und somit ist $\overline{AH} = b$.

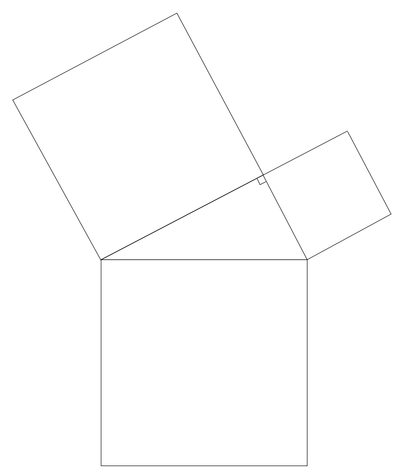
D.h. H erhält man, indem man von A aus die kürzere Quadratseite auf der längeren abträgt.

Es bleibt zu überprüfen, ob das entstandene Viereck $DECH$ tatsächlich ein Quadrat ergibt. Dies folgt aus der Kongruenz der Dreiecke DHA und HCB sowie der Gleichheit der Wechselwinkel an parallelen Geraden. Da sich dieses Quadrat $DECH$ aus den gleichen Teilfiguren zusammensetzt wie die beiden kleineren Quadrate, besitzen die beiden kleineren Quadrate denselben Flächeninhalt wie das große Quadrat.

Am Ende seiner Betrachtungen folgert dann Clairaut:

> "...nun entdeckt man leichtlich die so berühmte Eigenschaft des rechtwinkelichten Triangels, daß das Quadrat seiner größten Seite den Quadraten seiner zwo anderen Seiten im Inhalte gleich ist... Wenn man dahero aus zwey Quadraten eines machen will, so hat man nicht nöthig, sie erst neben einander zu setzen und zu zerstücken. Man darf nur ihre Seiten dergestalt setzen, daß sie einen rechten Winkel zusammen machen ...".

Mit dieser letzten Bemerkung beschreibt Clairaut die typische Pythagoraskonfiguration:



Die oben erläuterte Flächenaufteilung stammt übrigens nicht von Clairaut. Pythagorasexperten wissen, daß diese Überlegung viel älter ist. Sie findet sich bereits um 900 n.Chr. in den Schriften arabischer Gelehrter. Allerdings weist Clairauts Darstellung einen wesentlichen Vorteil auf. Bei ihm wird die Konfiguration schrittweise entwickelt, während sie in den arabischen Darstellungen ohne die Motivation "vom Himmel fällt".

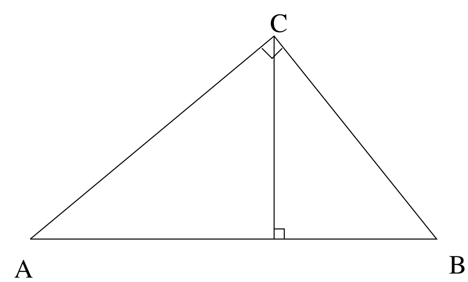
Eine große Wirkung erzielte Clairaut mit seinen didaktischen Ideen allerdings nicht. Es klingt ziemlich ernüchternd, wenn 1778 François Marie AROUET (1694 - 1778), besser bekannt unter dem Namen VOLTAIRE, in seinem *Dictionnaire philosophique* feststellt:

> "Der verstorbene Herr Clairaut nahm sich vor, die jungen Leute die Grundlagen der Geometrie leicht lernen zu lassen; er wollte zur Quelle zurückkehren und dem Weg unserer Entdeckungen und unserer Bedürfnisse folgen, die jene hervorgebracht haben. Diese Methode schien annehmbar und nützlich zu sein; aber man folgt ihr nicht: Sie erfordert im Lehrer eine Flexibilität des Geistes, der sich den jeweiligen Bedingungen anpassen kann, und eine seltene Anmut in jenen, die der Routine ihres Berufes nachgehen."

Voltaire stellt hier ganz treffend fest: Ein solcher entdeckender Unterricht ist anspruchsvoll, insbesondere auch für den Lehrer. Der Unterrichtsablauf läßt sich nicht bis in das letzte Detail planen, Routine kann gar nicht entstehen. Aber gerade dies ist eine einmalige Chance, hierin liegt doch der Reiz des Unterrichtens. Denn nicht fertige Mathematik, die tot im Kopf des Lehrers abgelegt ist, sondern nur lebendige Mathematik, die sich in der Diskussion entwickelt, kann einen Einblick in die Denk- und Arbeitsweise der Mathematik geben.

Der Lehrsatz des Pythagoras – auf den Spuren von A. Einstein

Wir betrachten nochmals die uns von dem klassischen Ähnlichkeitsbeweis her vertraute Figur.



Die Höhe (Strategie: *Einzeichnen einer geeigneten Hilfslinie*) unterteilt das rechtwinklige Ausgangsdreieck ABC in zwei ebenfalls rechtwinklige Teildreiecke, die sowohl untereinander als auch jeweils zum Ausgangsdreieck ähnlich sind. Jetzt wählen wir eine andere Vorgehensweise. Unsere Überlegungen stützen sich auf den Satz:

> Das Verhältnis der Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke ist gleich dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Längen in den Vielecken.

Aus historischen Gründen bezeichnen wir diesmal die Fläche mit E (= Ebene), der Index kennzeichnet die Hypotenuse des jeweils betrachteten rechtwinkligen Dreiecks:

$$\frac{E_a}{E_b} = (\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad , \ \frac{E_a}{E_c} = (\frac{a}{c})^2 = \frac{a^2}{c^2} \quad , \ \frac{E_b}{E_c} = (\frac{b}{c})^2 = \frac{b^2}{c^2} \ .$$

Für die einzelnen Flächen gilt mit einer Konstanten $m \neq 0$:

$$E_a = ma^2 \ , \ E_b = mb^2 \ , \ E_c = mc^2 \ .$$

Weiterhin ersieht man aus obiger Figur:

$$E_a + E_b = E_c \ ,$$

d.h. $\quad ma^2 + mb^2 = mc^2$,

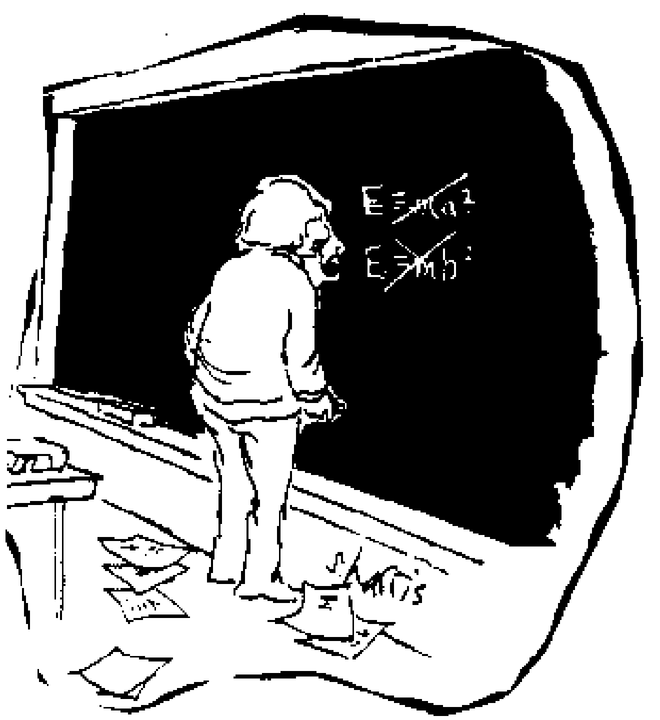
bzw. $\quad a^2 + b^2 = c^2$.

Dieser Beweis stammt – die Überschrift des vorliegenden Abschnitts verrät es bereits – von Albert Einstein (1879 - 1955). Als Schüler bekam er Privatunterricht in Geometrie durch seinen Onkel Jakob. Grundlage des Unterrichts waren die berühmten *Elemente* des Euklid (ca. 300 v.Chr.). Albert empfand viele der dort aufgeführten Beweise als unnötig kompliziert, insbesondere störten ihn die vielen Hilfslinien bei dem dort angeführten Beweis des Lehrsatzes des Pythagoras. Hier befindet er sich in guter Gesellschaft mit dem Philosophen Arthur Schopenhauer (1788 - 1860), der sogar von dem Euklidischen *Mausefallenbeweis* spricht (vgl. z. B. [1]). Albert Einsteins Beweis kommt – wie wir gesehen haben – mit einer einzigen Hilfslinie, nämlich der Höhe im rechtwinkligen Dreieck, aus.

Mit dem Namen Einstein verknüpft man in der Regel nicht den Lehrsatz des Pythagoras, sondern eher die Äquivalenz von Energie und Masse. Das von ihm gefundene Ergebnis sagt allgemein aus, daß jeder Form von Energie E eine Masse m zugeordnet ist (und umgekehrt). Die bekannte Formel lautet $E = mc^2$.

Diesen Zusammenhang zwischen Energie und Masse entdeckte Einstein durch seine theoretischen Betrachtungen. Die physikalische und technische Realisierung erfolgte erst später. Blicken wir zurück zu seinem Beweis des Pythagoras, so läßt sich eine formale Übereinstimmung der Formeln nicht übersehen! Jetzt kommt man ins Grübeln!

Hat die bekannte Gesetzmäßigkeit etwa ihre Wurzeln in Einsteins geometrischer Ausbildung in seiner frühen Jugend? Sind die theoretischen Betrachtungen, die zur Entdeckung der Äquivalenz von Energie und Masse führten, doch in anderer Weise verlaufen als bislang angenommen? Ein Blick an die Wandtafel in Einsteins Arbeitszimmer enthüllt Sensationelles:



Vorschläge zur Förderung der Selbständigkeit

Soweit die ersten Beispiele. Wenn man eigenständiges Arbeiten fördern will, ist es mit entsprechenden Aufgabenstellungen allein i.a. nicht getan. Wesentlich hängt der Erfolg von einem anregenden Unterrichtsklima ab. In starker Anlehnung an Heinrich WINTER möchte ich folgende Vorschläge machen, die m.E. nachdenkens- und auch nachahmenswert sind.

- Probleme (nicht nur geben, sondern) aus Kontexten heraus entwickeln, die herausfordernd erscheinen, zum Fragen anreizen,
- Möglichkeiten zum freien Experimentieren an die Hand geben und zum Vermuten ermuntern,
- Lern-/Entdeckungshilfen genügend offen halten, weniger Ergebnisfindungshilfen als mehr Hilfen zum Selbstfinden des Ergebnisses anbieten,
- für angenehmes Lernklima sorgen, insbesondere Zurückhaltung bzgl. einer zu schnellen Bewertung von Schülerbeiträgen, Abbau von Scheu vor ungewöhnlichen Vorschlägen,
- heuristische Strategien bewußt machen und bei entsprechenden Beispielen auch über Denken, Ausdrücken, Darstellen, Sichmerken, Erinnern, Vergessen, Fehlermachen, Üben usw. sprechen.

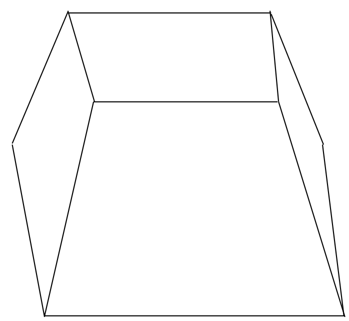
George Polya – immer (noch) aktuell!

Heuristische Strategien sind unser nächstes Stichwort. Hierzu schauen wir in einen der Klassiker des Problemlösens, nämlich in George Polyas (1887 - 1985) *How to solve it* (deutsche Übersetzung: *Schule des Denkens* [6]) . Dort finden wir folgendes Schema:

Wie sucht man die Lösung?
• Verstehen des Problems • Ausdenken eines Plans • Ausführen des Plans • Rückschau

Zur Erläuterung dieser vier Phasen betrachten wir ein Standardbeispiel Polyas, die Volumenberechnung eines geraden Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche (orientiert an [7]).

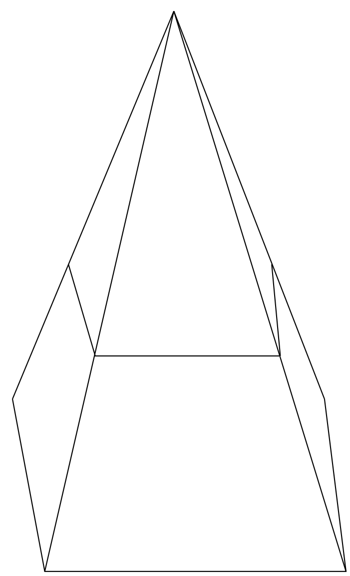
Bestimmen Sie das Volumen V des Stumpfes einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Es sind gegeben die Höhe h des Stumpfes, die Länge a einer Seite seiner oberen Fläche und die Länge b einer Seite seiner Grundfläche.



Der Lösungsprozeß

- *Verstehen des Problems*:
  Was brauche ich? Den Rauminhalt V des Pyramidenstumpfes. Frage: Was habe ich? Antwort: Die Seitenlängen a, b und die Höhe h.

- *Ausdenken eines Plans*:
  Zunächst versuche ich einen Zusammenhang zwischen den gegebenen Größen und der gesuchten Größe herzustellen. Wenn ich die Aufgabe auf diese Weise nicht lösen kann, suche ich am besten nach einer ähnlichen. Frage: Welches verwandte Problem kann ich lösen? Antwort: Ich kann das Volumen einer vollständigen Pyramide errechnen. Frage: Kann ich das Ziel, d.h. die Problemstellung anders ausdrücken? Antwort: Ich drücke die gesuchte Größe aus als Volumen der Gesamtpyramide minus Volumen der kleineren Pyramide an ihrer Spitze (also des abgeschnittenen Teils). Veränderte Problemstellung: Lassen sich mit den gegebenen Größen die Höhe der Gesamtpyramide und die Höhe ihres abgetrennten oberen Teils bestimmen?



- *Ausführen des Plans*:
  Anwenden der bekannten Formeln, um die Höhe der Gesamtpyramide und die Höhe des abzutrennenden oberen Teils und das jeweilige Volumen zu erreichen.

- *Rückschau*:
  Frage: Wie kann ich das Ergebnis überprüfen? Kann ich zu diesem Resultat auch auf einem anderen Weg gelangen? Gibt es andere Aufgaben, für die dieses Ergebnis eine Rolle spielt? Welche Methode bzw. Strategie wurde verwendet? Läßt sich diese Methode auch bei anderen Aufgaben anwenden?

Das Schema darf allerdings nicht zu der Vorstellung verleiten, daß die vier Phasen voneinander zu trennen sind und daß das Problemlösen linear verläuft. Natürlich überlappen sich die Phasen teilweise, und mancher Plan scheitert bei der Ausführung, d.h. der Problemlöser muß zu Phase 2 oder gar Phase 1 zurückkehren. Dieses Schema gibt keine Garantie für erfolgreiches Problemlösen, es hilft aber, die Gedanken zu ordnen und erzieht zur Selbständigkeit. Die kritische Stelle ist offensichtlich Phase 2. Was tun, wenn kein erfolgreicher Lösungsansatz gelingen will? Hier hat auch Polya kein Patentrezept. Er stellt lediglich fest: "The first rule of discovery is to have brains and good luck" und weiter: "The second rule of discovery is to sit tight till you get a bright idea".

Für den Unterricht kommt der vierten Phase große Bedeutung zu. Sie dient zum Verständnis, zur Vertiefung und Erweiterung der Problemstellung. Aufgaben sollen nicht isoliert betrachtet werden, sondern in einem Problemkontext eingebettet werden, der sich an Inhalten oder Strategien ausrichtet.

Die genannten Fragen im Polyaschen Stil können vorhandenes relevantes Wissen freisetzen und den Schüler an die Lösung heranführen. Die genannten Fragen sind Beispiele anspruchsloser, praktischer Heuristik des gesunden Laienverstandes. Der Lehrer sollte sie zunächst dem Schüler als *Hilfe zur Selbsthilfe* stellen. Ziel ist es letztendlich, daß der Schüler diese Fragen sich selbst stellt. So lernt er, seine Aufmerksamkeit auf die wesentlichen Dinge einer Problemstellung zu richten. Weiterhin erwirbt er dabei methodisches Denken, ein Lernziel des Mathematikunterrichts, das über Schule und Mathematik hinaus im späteren (Berufs-)Leben nutzbringend anwendbar ist.

Richten wir unseren Blick nochmals auf Phase 4 in Polyas Schema, die Rückschau. In diesem Zusammenhang sollten wir die Schüler auch anleiten, über den Wert bzw. die Bedeutung des Gelernten nachzudenken und sich zu äußern. Dieser Prozeß kommt natürlich nicht von selbst zustande. Hier müssen wir anstoßen, wir müssen geeignete Fragen stellen. VOLLRATH [8] macht einige Vorschläge, wie man beispielsweise das Nachdenken über die Bedeutung eines Lehrsatzes in Gang bringen kann:

- Was ist der Inhalt des Satzes?
- Welche Erkenntnis wird durch diesen Satz ausgedrückt?
- Welche Konsequenzen hat dieser Satz?
- Welche Probleme können mit Hilfe dieses Satzes gelöst werden?
- Versuche, den Satz in deinen eigenen Worten zu formulieren!
- Versuche, den Inhalt des Satzes durch ein Schlagwort zu treffen!
- Gib dem Satz einen treffenden Namen!

Das Ziel ist es also, daß die Schüler durch das Beschäftigen mit solchen Fragen und Aufforderungen die Bedeutung eines Lehrsatzes erfassen sollen. Wie läßt sich aber nun nachprüfen, ob dieses Ziel erreicht wurde? Hier weist Vollrath auf den *mathematischen Aufsatz* als geeignetes Instrumentarium hin. Oftmals empfohlen, aber selten in der Praxis durchgeführt. Die Technik eines solchen Aufsatzes kennen die Schüler aus dem Deutschunterricht. Bei der Aufsatzart *Erörterung* werden Argumente und Gegenargumente aufgeführt und gegeneinander abgewogen. Warum sollte man im Fach Mathematik nicht eine Erörterung mit dem Thema *Die Bedeutung des Lehrsatzes des Pythagoras* schreiben lassen? Natürlich erfordert die Beurteilung solcher schriftlicher Überlegungen mehr Aufwand und mehr Kompetenz im Vergleich zur traditionellen Mathematikaufgabe. Aber denken wir nur an die Deutschkollegen, diese müssen ständig Aufsätze bewerten.

Fragestellen – eine Basis für aktiv-entdeckendes Lernen

Wie wichtig das Fragestellen gerade für mathematisches Arbeiten ist, betont u.a. der bereits erwähnte Mathematiker Georg Cantor. Er spricht in diesem Zusammenhang sogar von der *Kunst des Fragestellens*. 1867 promovierte er mit einer Arbeit aus der Zahlentheorie. In der mündlichen Prüfung stellte er u.a. eine These auf, die die Grundlage für sein gesamtes wissenschaftliches Werk wurde.

> In re mathematica
> ars proponendi questiones
> pluris facienda est quam solvendi.
>
> In der Mathematik ist die Kunst des Fragestellens öfter gebräuchlich als die des Lösens.

Fragestellen bedeutet Neugierde, und Neugierde wiederum ist die Voraussetzung, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Wer Fragen stellt, legt seine Passivität ab, er wird aktiv. Ein Mathematikunterricht, der lediglich aus dem Beantworten von Fragen besteht, die der Lehrer stellt (und die die Schüler nie stellen würden), ist ziemlich langweilig und ermöglicht auch keine Einblicke in mathematische Arbeitsmethoden. Der Mathematiker Hans Freudenthal (1905 - 1990) empört sich daher in seinem Buch *Mathematik als pädagogische Aufgabe* [4]:

> "Ich verurteile das anmaßende "quod licet Jovi, non licet bovi" des erwachsenen Mathematikers, der als Didaktiker dem Lernenden nicht nur vorschreibt, was er zu lernen hat, sondern auch auf welchem haarklein vorgezeichneten Weg, und ihm alle Seitensprünge, die ja zu Fehlern verführen könnten, verbietet."

Mit der zitierten Äußerung propagiert Freudenthal das *Prinzip des aktiv-entdeckendes Lernens*. Die Realisierung dieses Prinzips sollte zentrales Anliegen unseres Unterrichts sein. Aber dies ist leichter gesagt als getan.

Wir suchen nach einem Rezept für die Umsetzung unseres Zieles. Vielleicht hilft uns ein Blick zu dem TIMSS Wunderknaben Japan? Gibt es Unterschiede zu unserem Unterricht? Falls ja, welche?

Aus Videostudien und aus Life-Beobachtungen von Kollegen ergibt sich folgendes *Grundschema einer japanischen Mathematikstunde* (vgl. auch [5]):

- Stellen eines Problems und Sichern des Verstehens der Fragestellung.
- Selbständige Bearbeitung und eigenständige Lösung durch die Schüler (Einzel- oder Kleingruppenarbeit).
- Sammeln der verschiedenen Lösungen und Austausch darüber.

Gegebenenfalls wird dieses Schema ein oder mehrmals wiederholt, d.h. neue Problemstellungen werden in gleicher Weise angegangen.

Auf den ersten Blick erkennt man vielleicht gar keinen Unterschied zu einer deutschen Problemlösestunde. Dies war auch die Reaktion vieler Lehrer und Studenten, mit denen ich Videostunden ansah. Aber es gibt einen gravierenden und – in meinen Augen – entscheidenden Unterschied, der unter Umständen wesentlich zu dem unterschiedlichen Abschneiden der deutschen und japanischen Schüler beigetragen hat. Die kritische Stelle liegt beim Übergang von Phase 1 zu Phase 2 des Schemas. Nachdem der japanische Lehrer das Verständnis der Aufgabenstellung überprüft hat, arbeiten die Schüler selbständig. Weder wird ein möglicher Lösungsweg gemeinsam mit der Klasse andiskutiert, noch gibt der Lehrer einen diesbezüglichen Hinweis. Die Schüler setzen sich ohne Hilfe von außen mit dem Problem auseinander. Diese Vorgehensweise erzieht zur *Selbständigkeit*, diese Vorgehensweise liefert beinahe automatisch unterschiedliche Lösungswege. Ein Unterrichtsgespräch über das Problem wird erst nach der eigenständigen Arbeit geführt. Dieses Gespräch lenkt zwar der Lehrer, die Schüler sind aber inzwischen kompetentere Partner bzgl. des gestellten Problems geworden und können so den Erklärungen mit größerem Verständnis folgen.

Wenden wir uns einer vergleichbaren Unterrichtsstunde bei uns zu. Der Übergang von Phase 1 zu Phase 2 wird mit einer Frage eingeleitet, die in etwa folgendermaßen lautet: “Wie können wir an die Lösung herangehen?” Vorschläge der Schüler werden aufgegriffen und diskutiert. In einem fragend-entwickelnden Unterrichtsgespräch wird der Lösungsweg – ich betone: der Lösungsweg – skizziert. Die “selbständige” Problemlösung der Schüler besteht dann in der Durchführung des skizzierten Lösungsweges. Auf diese Weise entmündigen wir – ohne böse Absicht – unsere Schüler. Wir brauchen uns dann nicht mehr zu wundern, wenn selbst bei geringfügig ungewohnter Aufgabenstellung der Entsetzensschrei unisono erklingt: “Das haben wir noch nicht gehabt.”

Mit dem fragend-entwickelnden Unterricht unterbinden wir die Vielfalt möglicher Lösungswege, auch die angestrebte Eigenständigkeit der Schüler bleibt auf der Strecke. Denn wir zerlegen bei dieser Vorgehensweise anspruchsvolle und komplexe Problemstellungen in wohlportionierte Häppchen, d.h. in kleine scharf umrissene Teilprobleme, und verhindern somit ein individuell geprägtes Vorgehen.

Welche Konsequenz sollen wir aus dieser Beobachtung ziehen? Lautet das didaktische Erfolgsrezept: Die Schüler sich selbst überlassen? Sicher nicht. Kaum jemand lernt Klavierspielen, indem er ans Klavier gesetzt wird und dann ohne jede Anleitung zu klimpern beginnen muß. Am Beginn einer Pianistenkarriere stehen Fingerübungen unter Anleitung. Auf die Schule übertragen heißt das: *lehrergeleiteter* Unterricht. Aber dies ist nicht gleichzusetzen mit fragend-entwickelndem Unterricht, wie u.a. das Beispiel Japan zeigt.

Wie sehen die Fingerübungen eines erfolgreichen Problemlösers aus? Hier schließt sich der Kreis, denn wir sind wiederum bei George Polya angelangt. Vergegenwärtigen wir uns nochmals sein Schema eines Problemlöseprozesses.

Wie sucht man die Lösung?
• Verstehen des Problems • Ausdenken eines Plans • Ausführen des Plans • Rückschau

Phase 1 (Verstehen des Problems) findet in einer japanischen Mathematikstunde als Unterrichtsgespräch statt. Der entscheidende Schritt wird dann in Phase 2 vollzogen, und zwar eigenständig von den japanischen Schülern. Unser Hauptproblem lautet nun: Wie kann der Lehrer die Schüler zum Entdecken führen, ohne ihnen die Entdeckung vorwegzunehmen? Polya schlägt vor, daß der Lehrer nur “Hilfen von innen” geben soll, d.h. nur solche Anregungen, die sich auch der Schüler selbst hätte geben können, wenn er nur daran gedacht hätte. “Hilfe von außen” sollte er vermeiden, d.h. der Lehrer darf keine Teile der Lösung verraten, welche dem Schüler bei seinem momentanen Wissensstand nicht zur Verfügung stehen. Solche “Hilfe zur Selbsthilfe” ist wichtig – allerdings nicht leicht zu geben. Der Lehrer muß dazu sowohl die Aufgabe als auch die Schüler gut kennen.

Wie löst man Probleme? – Polyas Zwiegespräch

Hilfe zur Selbsthilfe liefert die Heuristik. Wir geben ein Zwiegespräch zum Thema *Wie löst man Probleme?* im Originalton Polya wieder. Die Formulierungen klingen zwar teilweise etwas antiquiert, schließlich ist der Text bereits im fortgeschrittenen Gruftialter (> 50), aber dies hat auch einen Vorteil. Wir müssen die Fragestellungen – bevor wir sie für den Unterricht übernehmen – modernisieren, überarbeiten, ergänzen und den jeweiligen Situationen anpassen. Auf diese Weise entsteht ein aktueller Fragenkatalog, der bei konsequenter Anwendung den Problemlöseprozeß erleichtern hilft (siehe [6], S. 48-51).

Vertrautwerden mit der Aufgabe

Wo soll ich beginnen? Geh aus von der Formulierung der Aufgabe.

Was kann ich tun? Stelle Dir die Aufgabe als Ganzes so deutlich und so lebendig vor Augen, wie Du nur kannst. Kümmere Dich im ersten Augenblick nicht um Einzelheiten.

Was kann ich dadurch erreichen? Du sollst die Aufgabe verstehen, Dich mit ihr vertraut machen und ihre Absicht Dir tief einprägen. Die Aufmerksamkeit, die Du der Aufgabe widmest, mag auch Dein Gedächtnis anstacheln und für die Erinnerung an wesentliche Dinge vorbereiten.

Erarbeiten eines besseren Verständnisses

Wo soll ich beginnen? Geh wieder von der Formulierung der Aufgabe aus. Fange an, wenn diese Formulierung Dir so klar ist und Du sie Dir so tief eingeprägt hast, daß Du sie für eine Weile aus dem Auge verlieren kannst, ohne Furcht, sie ganz zu verlieren.

Was kann ich tun? Trenne die Hauptteile Deiner Aufgabe. Hypothese (Annahme, Voraussetzung) und Folgerung sind die einer “Beweisaufgabe”, die Unbekannte, die Daten und die Bedingung sind die Hauptteile einer “Bestimmungsaufgabe”. Gehe die Hauptteile Deiner Aufgabe durch, betrachte sie nacheinander, betrachte sie abwechselnd, betrachte sie in verschiedenen Kombinationen, indem Du jede Einzelheit auf andere Einzelheiten und auf die Gesamtheit der Aufgabe beziehst.

Was kann ich dadurch erreichen? Du sollst Einzelheiten vorbereiten und klären, die geeignet sind, später eine Rolle zu spielen.

Verfolgen einer nützlichen Idee

Wo soll ich beginnen? Geh aus von der Betrachtung der wichtigsten Teile Deiner Aufgabe. Fange an, wenn diese wichtigsten Teile dank Deiner vorhergehenden Arbeit deutlich geordnet und klar verstanden sind und Dein Gedächtnis bereitwillig mitwirken will

Was kann ich tun? Betrachte Deine Aufgabe von verschiedenen Seiten und suche eine Berührung mit Deinem früher erworbenen Wissen herzustellen.
Betrachte Deine Aufgabe von verschiedenen Seiten. Hebe nachdrücklich verschiedene Teile hervor, prüfe verschiedene Einzelheiten, prüfe dieselben Einzelheiten wiederholt, aber auf verschiedene Weise, setze Einzelheiten verschieden zusammen, gehe von verschiedenen Seiten an sie heran. Suche in jeder Einzelheit eine Bedeutung zu sehen, eine neue Auslegung des Ganzen.
Suche Berührungspunkte mit Deinem früher erworbenen Wissen. Versuche darüber nachzudenken, was Dir in ähnlichen Situationen früher geholfen hat. Versuche in dem, was Du untersuchst, etwas Bekanntes wiederzuerkennen, versuche in dem, was Du wiedererkennst, etwas Nützliches gewahr zu werden.

Was könnte ich denn gewahr werden? Eine nützliche Idee, vielleicht eine entscheidende Idee, die Dir auf den ersten Blick den Weg zum Ziele zeigt.

Wie kann eine Idee nützlich sein? Sie zeigt Dir den ganzen Weg oder einen Teil davon; sie schlägt Dir mehr oder weniger deutlich vor, wie Du verfahren kannst. Ideen sind mehr oder weniger vollständig. Du bist glücklich dran, wenn Du überhaupt eine Idee hast.

Was kann ich mit einer unvollständigen Idee machen? Du solltest sie betrachten. Wenn sie vorteilhaft aussieht, solltest Du sie länger betrachten. Wenn sie zuverlässig aussieht, solltest Du erproben, wie weit sie Dich führt, und die Situation von neuem erwägen. Die Lage hat sich dank Deiner nützlichen Idee verändert. Betrachte die neue Lage von verschiedenen Seiten und suche Berührpunkte mit Deinem früher erworbenen Wissen.

Was kann ich durch solche Wiederholung erreichen? Du kannst das Glück haben, daß Dir eine neue Idee einfällt. Vielleicht wird Deine neue Idee Dich sogleich zur Lösung führen. Vielleicht brauchst Du nach dieser neuen noch weitere förderliche Ideen. Vielleicht wirst Du von einigen Deiner Ideen irregeführt. Nichtsdestoweniger solltest Du für alle neuen Ideen dankbar sein, auch für die geringwertigen, auch für die unklaren, auch für die ergänzenden, die einer unklaren Idee etwas Genauigkeit geben oder eine weniger glückliche Idee zu verbessern suchen. Selbst wenn Du für eine Weile auf keine wertvolle neue Idee kommst, solltest Du dankbar sein, wenn Dein Verständnis vollständiger oder zusammenhängender, gleichartiger oder besser ausgeglichen wird.

Ausführen des Plans

Wo soll ich beginnen? Geh aus von der glücklichen Idee, die Dich zur Lösung führte. Beginne, wenn Du Dich sicher fühlst, den Hauptzusammenhang zu beherrschen, und wenn Du zuversichtlich glaubst, wünschenswerte unbedeutendere Einzelheiten ergänzen zu können.

Was kann ich tun? Versuche die Aufgabe völlig sicher zu beherrschen. Führe alle die algebraischen und geometrischen Operationen, die Du vorher als praktisch erkannt hast, im einzelnen durch. Überzeuge Dich von der Richtigkeit eines jeden Schrittes durch formale Beweisführung oder durch intuitive Einsicht oder, wenn möglich, durch beides. Wenn Deine Aufgabe sehr kompliziert ist, so kannst Du "große" und "kleine" Schritte unterscheiden, wobei jeder große Schritt sich aus mehreren kleinen zusammensetzt. Kontrolliere zuerst die großen Schritte, und gehe danach zu den kleinen über.

Was kann ich dadurch erreichen? Eine Darstellung der Lösung, bei der jeder Schritt ohne allen Zweifel richtig ist.

Rückschau

Wo soll ich beginnen? Mit der in jeder Einzelheit vollständigen und genauen Lösung.

Was kann ich tun? Betrachte die Lösung von verschiedenen Seiten, und suche Berührungspunkte mit Deinen früher erworbenen Kenntnissen.
Betrachte die Einzelheiten der Lösung und versuche sie so einfach zu machen, wie Du kannst; überblicke ausgedehntere Teile der Lösung und versuche sie kürzer zu fassen; versuche die ganze Lösung auf den ersten Blick zu übersehen. Versuche kürzere oder längere Teile der Lösung zu ihrem Vorteil zu verändern; versuche die ganze Lösung zu verbessern, sie anschaulich zu machen, sie möglichst natürlich in Dein früher erworbenes Wissen einzufügen. Prüfe genau die Methode, die Dich zur Lösung führte, versuche den entscheidenden Punkt darin zu sehen und ihn für andere Aufgaben zu verwenden. Prüfe genau das Resultat und versuche es, für andere Aufgaben zu verwenden.

Was kann ich dadurch erreichen? Du kannst eine neue und bessere Lösung finden. Du kannst neue und interessante Tatsachen entdecken. Auf jeden Fall wirst Du, wenn Du es Dir zur Gewohnheit machst, Deine Lösungen auf diese Weise zu erblicken und zu prüfen, ein gutgeordnetes Wissen erwerben und Deine Fähigkeit im Aufgabenlösen entwickeln.

Soweit der Originaltext Polyas. Über die Fragetechnik des Zwiegesprächs sollte nachgedacht, und die Fragen sollten – wie eingangs bereits vorgeschlagen – in eine zeitgemäße Sprache übertragen werden. Aber damit sind wir noch nicht am Ziel, wir sind genaugenommen kaum über den Start hinausgekommen. Die Richtung stimmt zwar, denn wir tasten uns mit den Fragen an das Problem bzw. dessen Lösung heran. Aber für solche eher allgemein gehaltenen Fragen gilt jedoch das sog. Bandbreiten-Genauigkeitsdilemma: Je allgemeiner die Fragen sind, desto geringer ist ihr Nutzen bei der Lösung spezifischer, anspruchsvoller Probleme. Folglich müssen wir lernen, die Fragen flexibler zu handhaben. Wichtig ist, daß wir uns die Art der Fragestellung von Polya zu eigen machen, die speziellen Fragen selbst erwachsen dann aus dem jeweils vorliegenden Problem. Hierbei sollten wir Aufzeichnungen machen und mit jeder Problemlösung unseren persönlichen Fragenkatalog systematisch erweitern.

Rückführen auf einen bekannten Fall – ein Beitrag zum kumulativen Lernen

Wissenserwerb im Alltagsleben und in der Schule erfolgt sowohl *additiv* als auch *kumulativ*. Neue Elemente werden dem bestehenden Wissen additiv hinzugefügt, ohne daß damit ein vertieftes Verständnis der Zusammenhänge erreicht werden muß. Wird dagegen eine gut vernetzte Wissensbasis in einem Sachgebiet sukzessive aufgebaut, spricht man von kumulativen Lernprozessen. Im Unterricht ergänzen sich normalerweise additiver und kumulativer Wissenserwerb. Wenn Schüler beispielsweise mit einem neuen Lehrsatz oder Algorithmus vertraut gemacht werden, sollte sich nicht nur ihr Wissen um diesen speziellen Stoff erweitern. Ebenso sollte aufgezeigt werden, wozu der neue Stoff nützlich ist und wie er mit dem vorhandenen Wissen in Verbindung steht. Das Beschäftigen mit dem Stoff sollte letztendlich zu einem qualitativ vertieften Verständnis führen. Hier bestehen der TIMS-Studie zufolge größere Defizite in unserem Unterricht.

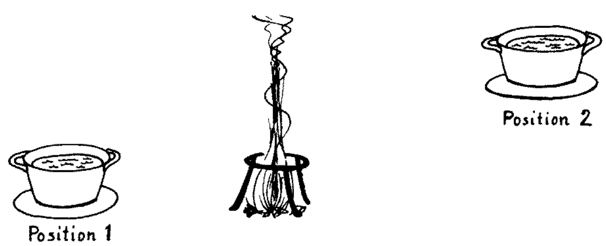
> Im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht werden im internationalen Vergleich und im Vergleich zu den sprachlichen Fächern relativ geringe Wissenszuwächse erzielt. Die Fächer werden offensichtlich wenig kumulativ unterrichtet.

Nach Baumert [2] sind die beste Voraussetzung für kumulative Lernprozesse und selbständiges, erfolgreiches Weiterlernen in einem breiten Wissens- und Anwendungsbereich nicht formale Schlüsselqualifikationen, sondern eine solide und gut organisierte Basis in der jeweiligen Domäne. Damit sind nicht vereinzelte und mechanisch erworbene Kenntnisse gemeint, sondern ein intelligent geordnetes, in sich vernetztes Wissen, das in verschiedenen Situationen und Kontexten erprobt und anwendbar ist.

Der kumulative Verlauf des Lernens wird unmittelbar durch die Qualität des Vorwissens bestimmt. Was kennzeichnet diese Qualität? Neben Umfang und Organisation des Wissens kommt es nach Baumert auch auf die mentale Repräsentation und der Abrufbarkeit an. Beim kumulativen Lernen wird bestehendes Wissen aktiviert, zurückliegende Stoffgebiete werden wiederholt. Es zeigt sich noch ein weiterer wichtiger Aspekt: Ein gut verfügbares Vorwissen erleichtert den Zugang zu neuen Inhalten bzw. das Lösen von Problemen.

Dies soll an Beispielen verdeutlicht werden. Dazu erinnere ich an die Volumenbestimmung des Pyramidenstumpfes. Die dort verwendete Strategie lautet *Rückführen auf einen bekannten Fall.* Diese Vorgehensweise gehört zu den naiven Alltagsstrategien, denn man versucht zunächst immer ganz automatisch, etwas Neues mit etwas Bekanntem in Verbindung zu bringen. Vielleicht nicht ganz ernst gemeint, aber sehr einprägsam, verdeutlicht Friedrich Wille diese Strategie folgendermaßen (vgl. [9]):

> Ein Physiker und ein Mathematiker sollen Wasser kochen. Es ist eine Feuerstelle vorhanden, sowie ein Topf mit Wasser, der in Position 1 steht.
>
> Der Physiker löst das Problem, indem er den Topf auf das Feuer setzt. Der Mathematiker löst es auf die gleiche Weise.



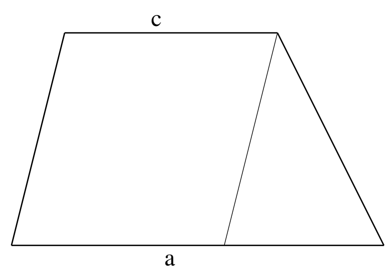
> Ein neues Problem: Wieder soll Wasser gekocht werden, doch steht der Topf mit kaltem Wasser diesmal in Position 2, während die Feuerstelle an ihrem alten Platz steht.
>
> Der Physiker löst das Problem wieder so, daß er den Topf auf das Feuer setzt. Der Mathematiker dagegen stellt den Topf in Position 1 und hat damit das Problem auf das vorherige zurückgeführt.

In Phase 4 seines Problemlöseprozesses, der Rückschau, fordert Polya nach anderen Problemen Ausschau zu halten bzw. sich an sie zu erinnern, die mit derselben Strategie angegangen werden können. Das wollen wir nun tun.

> Von einem Trapez sind die Längen der parallelen Seiten und die Höhe gegeben: $a = 7$ cm, $c = 4$ cm, $h = 4$ cm. Wie groß ist der Flächeninhalt?

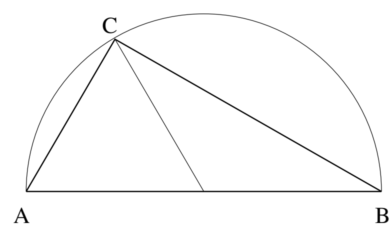
Wir gehen hier davon aus, daß die Flächeninhaltsformel für das Trapez nicht bekannt ist. Nach der Strategie *Rückführen auf einen bekannten Fall* sollen die Schüler wiederholen, welche Flächenformeln bekannt sind.

Nun bleibt zu überprüfen, in welche dieser Flächen sich das Trapez zerlegen läßt, und wie diese Zerlegung erfolgt. Eine weitere, in der Elementargeometrie beliebte Strategie kommt zur Anwendung: *Einzeichnen einer geeigneten Hilfslinie.*



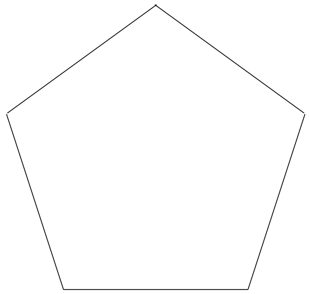
Auf diese Weise kann das Trapez in ein Parallelogramm und in ein Dreieck zerlegt werden, von denen jeweils eine Seite und die entsprechende Höhe bekannt sind.

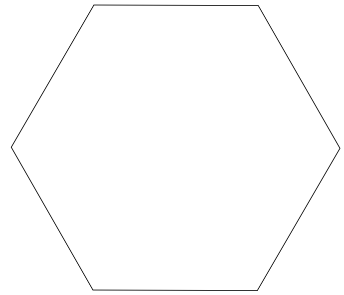
Wir greifen die neue Strategie *Einzeichnen einer geeigneten Hilfslinie* auf. Mit ihr läßt sich beispielsweise ohne Mühe zeigen, daß ein Dreieck, dessen eine Seite Kreisdurchmesser ist, rechtwinklig ist (Thales!).



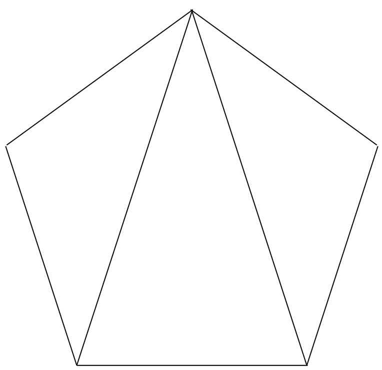
Dazu ist lediglich der Kreismittelpunkt mit dem Eckpunkt C zu verbinden. Die Aussage folgt mittels gleichschenkliger Dreiecke und der Winkelsumme im Dreieck.

Auch bei der Bestimmung der Größe der Innenwinkel eines regelmäßigen Vielecks (n-Ecks) können wir unmittelbar an Bekanntes anknüpfen. Betrachten wir als *Spezialfälle* das regelmäße 5- bzw. 6-Eck.

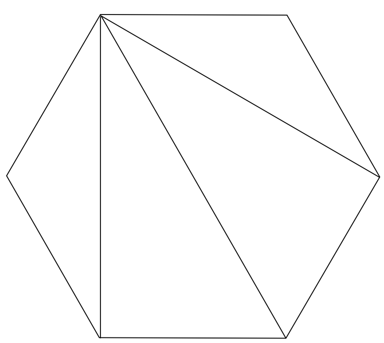




Da alle Innenwinkel gleich groß sind, genügt es, die Summe der Innenwinkel zu ermitteln (Überführen in eine andere Problemstellung, Polya!). Die Innenwinkelsumme im Dreieck gehört zum Grundwissen. Also liegt es auf der Hand, das vorliegende 5- bzw. 6-Eck in Dreiecke zu zerlegen.



Fünfeck $\longrightarrow$ drei Dreiecke
Innenwinkel: $\frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$

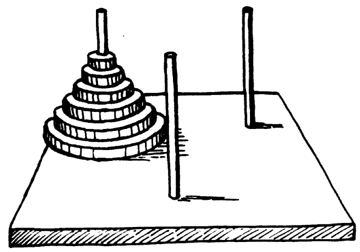


Sechseck $\longrightarrow$ vier Dreiecke
Innenwinkel: $\frac{4}{6} \cdot 180° = 120°$

Diese Vorgehensweise bei den Spezialfällen können wir auch für den allgemeinen Fall übernehmen. Von einem beliebigen Eckpunkt eines n-Ecks starten $n-2$ Diagonalen (lediglich die beiden Nachbarpunkte sind ausgenommen, hier fallen die Diagonalen mit dem Rand zusammen). Wir erhalten somit $n-2$ Dreiecke, und damit gilt:

$$\text{Größe des Innenwinkels: } \frac{n-2}{n} \cdot 180°.$$

Wir verlassen die Elementargeometrie und blicken nach Paris zum Eiffelturm, der anläßlich der Weltausstellung von 1889 errichtet wurde. Einen wesentlich niedrigereren Turm stellte während dieser Ausstellung der französische Zahlentheoretiker Anatole Edouard LUCAS (1842 - 1891) vor, und zwar den *Turm von Hanoi*.



Dieses Spiel besteht aus kreisförmigen Lochscheiben, die der Größe nach auf einem von drei Stäben gestapelt sind. Dieser Scheibenturm soll nun auf einem der beiden anderen Stäbe errichtet werden. Dabei sind folgende Spielregeln zu beachten:

- Die Scheiben müssen einzeln umgeschichtet werden.
- Keine größere Scheibe darf über einer kleineren liegen.

Es interessiert nun die Anzahl der Umschichtungen, die möglichst klein sein soll.

Jetzt geht es natürlich ans Spielen, entweder mit einem edlen Modell aus Holz oder mit einer schlichten Variante. Drei dicke Striche auf einer Overheadfolie, und anstelle der Lochscheiben werden Pappstreifen verschoben.

Zunächst besteht der Turm aus drei, dann vier, fünf, sechs Scheiben. Die Aufgaben lassen sich durch Probieren lösen, aber es wird immer mühsamer. Wir erhöhen die Anzahl der Scheiben, z.B. auf 20. Wie viele Umschichtungen sind nun erforderlich?
Es liegt auf der Hand, die Anzahlfrage für einen Turm aus 20 oder sogar mehr Scheiben nicht mehr durch Probieren, d.h. experimentell, zu klären. Die Anzahl der Umschichtungen ist schlichtweg zu groß.

Jetzt sind wir an einer entscheidenden Stelle angelangt. Von einer experimentellen Vorgehensweise gehen wir über zu einer abstrakten Tätigkeit, das konkrete Spiel wandelt sich zu einem Spiel des Geistes.

Wir überlegen uns ein *systematisches Vorgehen*. Dazu greifen wir auf unsere bei den konkreten Umschichtungen erworbenen Kenntnisse zurück (Strategie: *Rückführen auf einen bekannten Fall!*). Können wir unsere Kenntnisse vom Umschichten eines 3-Scheiben-Turmes beim Umschichten eines 4-Scheiben-Turmes ausnutzen? Die wesentliche Frage lautet: Wann kann man beim 4-Scheiben-Turm die unterste Scheibe umschichten? Dies ist erst dann möglich, wenn der Turm aus den drei oberen Scheiben auf einem anderen Stab aufgebaut ist. Dieser 3-Scheiben-Turm muß anschließend auf der vierten Scheibe wiedererrichtet werden.

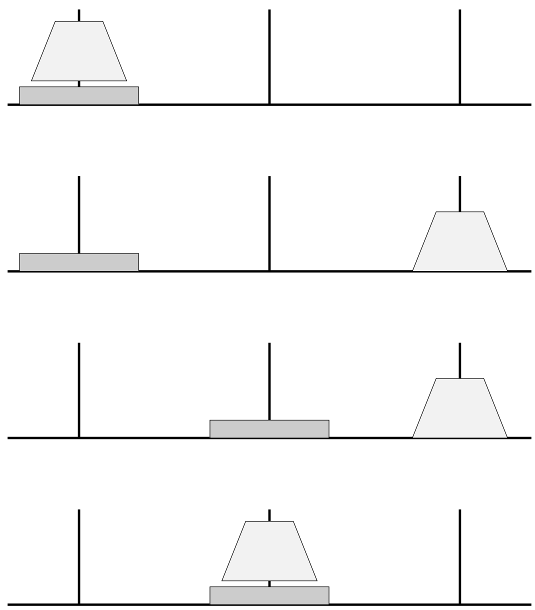
Bezeichnen wir die Anzahl der Umschichtungen eines Turmes aus k Scheiben mit $\mathcal{A}(k)$, dann gilt:

$$\mathcal{A}(4) = \mathcal{A}(3) + 1 + \mathcal{A}(3) = 2 \cdot \mathcal{A}(3) + 1.$$

Wir haben also das Umschichten eines 4-Scheiben-Turmes auf das Umschichten eines 3-Scheiben-Turmes zurückgeführt. Entsprechend gilt:

$$\mathcal{A}(5) = \mathcal{A}(4) + 1 + \mathcal{A}(4) = 2 \cdot \mathcal{A}(4) + 1.$$

Diese Überlegungen geben uns Einsicht in die Strategie des Umschichtprozesses. Die entscheidenden Positionen zeigt nochmals folgende Abbildung:



Insgesamt erhalten wir für die Anzahl der Umschichtungen die *rekursive* Darstellung

$$\boxed{\mathcal{A}(k) = 2 \cdot \mathcal{A}(k-1) + 1 \text{ für } k \geq 2, \text{ wobei } \mathcal{A}(1) = 1\ .}$$

Bem: An dem Spiel *Turm von Hanoi* lassen sich typische Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik aufzeigen. Das Erarbeiten der Rekursionsformel bildet lediglich den Einstieg in die Thematik.

Elemente einer neuen Aufgabenkultur

Elemente einer neuen Aufgabenkultur lautet das Thema der vorangehenden Überlegungen zu den Modulen 1 und 5. "Neu" bedeutet nicht neue Aufgaben. Die meisten der traditionellen Aufgaben eignen sich gut für den Unterricht. "Neu" bezieht sich hier auf die Art und Weise, wie die Aufgaben im Unterricht eingesetzt bzw. behandelt werden, wie mit den Aufgaben umgegangen wird.

Im Brennpunkt steht nicht nur die Aufgabe selbst, sondern vor allem das Ziel, das wir durch das Beschäftigen mit den Aufgaben erreichen wollen. Es geht um das *Herausarbeiten von Strategien*, von Leitideen, die den Aufgaben bzw. deren Lösungen zugrunde liegen. Und es geht um das *Anwenden dieser Strategien* bzw. um das *Erkennen der Leitideen* in anderen Aufgaben.

Aufgaben lassen sich, wiederum im Sinne von Polyas Rückschau (Phase 4), auch als Ausgangspunkt für neue Problemstellungen, also gewissermaßen als *Problemkeime* nutzen. Dazu stellen wir Fragen folgender Art:

- Gibt es verschiedene Zugänge zu dieser Aufgabe?
- Gibt es unterschiedliche Lösungsmethoden?
- Läßt sich die Aufgabenstellung erweitern, verallgemeinern?
- Welche neuen Erkenntnisse bringt mir diese Aufgabe bzw. deren Lösung?
- Mit welchen bekannten Stoffinhalten läßt sich die Aufgabe bzw. deren Ergebnis vernetzen?
- Läßt sich die Aufgabe in ein übergeordnetes Konzept einfügen?

Neu im eigentlichen Sinne des Wortes ist unsere Vorgehensweise beim Umgang mit Aufgaben auch nicht, wie u.a. die genannten Zitate von Alexander Wittenberg und Heinrich Mann belegen. Doch hat das tägliche Unterrichtsgeschäft dazu geführt, daß einiges in Vergessenheit geraten ist, wir manche Dinge vielleicht zu routiniert angehen und manchmal versäumen, eingefahrene Wege zu hinterfragen. Als Rechtfertigung können daher folgende Worte des französischen Schriftstellers und Nobelpreisträgers André Gide (1869 - 1951) dienen:

> Alles ist schon einmal gesagt worden,
> aber da niemand zuhört,
> muß man es stets von Neuem sagen.

Literatur

[1] Baptist, Peter: Pythagoras und kein Ende? Klett, Stuttgart 1997

[2] Baumert, Jürgen: Fachbezogenes - fächerübergreifendes Lernen/Erweiterte Lern- und Denkstrategien (Forum 5). In: Wissen und Werte für die Welt von morgen. Dokumentation zum Bildungskongreß, München 1998

[3] Carroll, Lewis: Alice im Wunderland. Insel TB, Frankfurt/Main 1973

[4] Freudenthal, Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett, Stuttgart 1973

[5] Neubrand, Johanna: Charakteristika japanischen Unterrichts aus mathematik-didaktischer Sicht. Erscheint in: mathematik lehren

[6] Polya, George: Schule des Denkens. Francke, Bern und München 1980^3

[7] Polya, George: Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Bd. 2. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1967

[8] Vollrath, Hans-Joachim: Sätze angemessen bewerten lernen. Mathematik in der Schule, 31, 1993

[9] Wille, Friedrich: Humor in der Mathematik. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1989^2

[10] Winter, Heinrich: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Vieweg, Braunschweig 1989

[11] Wittenberg, Alexander: Bildung und Mathematik. Klett, Stuttgart 1990^2