BLK-Programm

Steigerung der Effizienz des
mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Materialien zum Mathematikunterricht

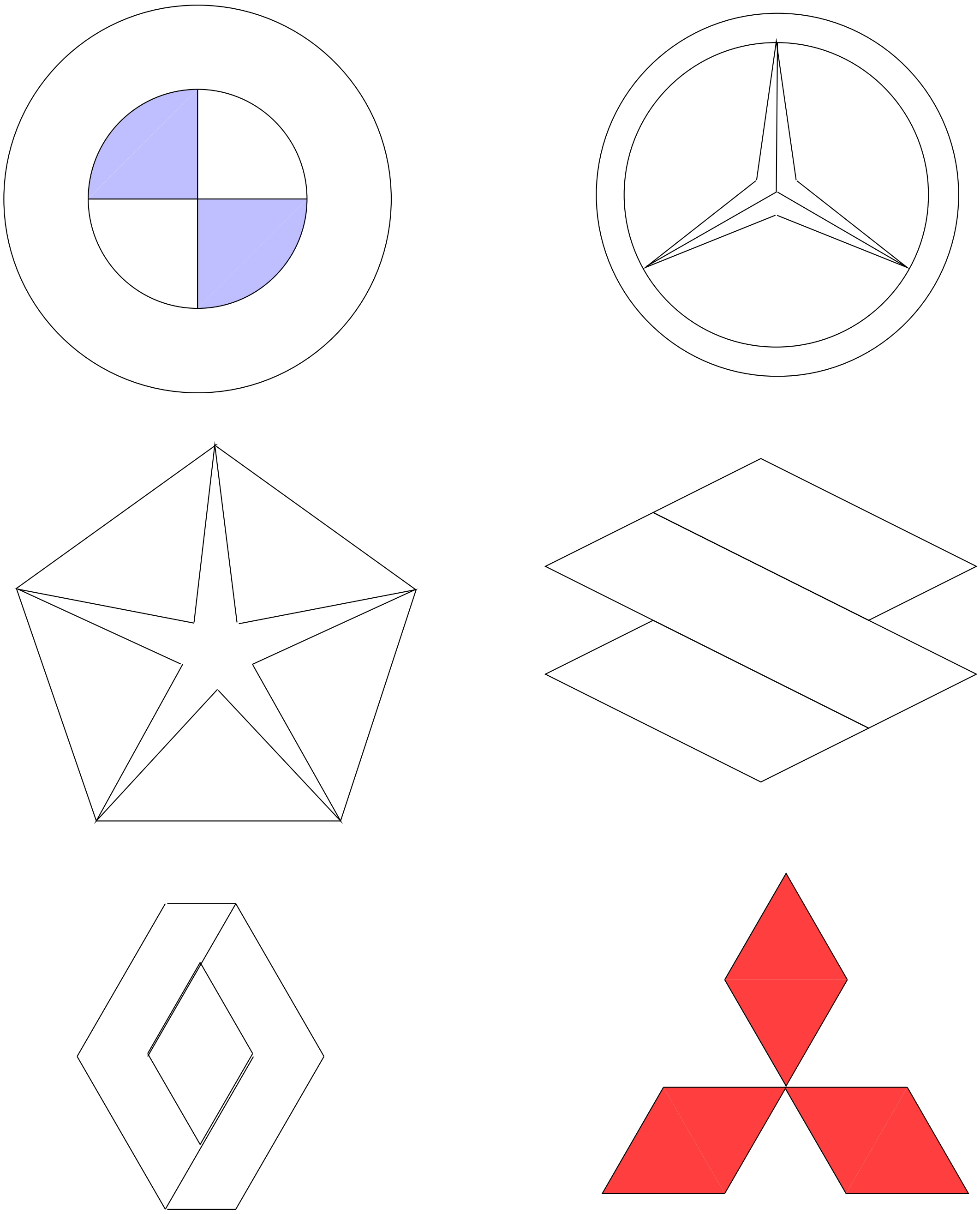
November 1999

Firmenlogos

Anregungen zu den Modulen 1, 5, 6 und 9

Edgar Höniger, Bayreuth

Lehrstuhl Mathematik und ihre Didaktik, Universität Bayreuth,
95440 Bayreuth



Auf Schritt und Tritt begegnen uns Wahrzeichen, die geometrische Strukturen enthalten. Für manche unserer Schüler/innen sind solche Bilder schon deshalb interessant, weil sie das zugehörige Produkt favorisieren, oder weil sie das Logo einfach schön finden.
Wir beschränken uns hier exemplarisch auf Wahrzeichen von Automarken, wobei im

Sinne einer ausgewogenen Förderung von Mädchen und Jungen (Modul 7) sicher auch andere Beispiele gefunden werden können.
Um der Eigeninitiative im Mathematikunterricht mehr Raum zu lassen, wäre folgendes denkbar:

- Die Schüler/innen werden aufgefordert, Fragen, die sich aus der konkreten Vorlage eines Bildes ergeben, selbst zu formulieren und aufzuschreiben. Sie erstellen somit einen Katalog aus Fragen, die für sie interessant sein könnten.

- Die Schüler/innen entscheiden zusammen mit der Lehrkraft, welche Fragen sich als Aufgaben oder Anregungen in den Mathematikunterricht einbauen lassen. Wo dieser Bezug nicht existiert, soll der Blick auf andere Fächer, die solche „übrigen Fragen“ abdecken, gelenkt werden.
  Die Formulierung und die Lösung solcher Aufgaben erlauben es, sowohl bisher Gelerntes an einem neuen Thema zu entdecken und wieder zu üben, als auch neue Begriffe einzuführen und zu festigen.

- Das Bild und bestimmte Aufgaben werden variiert, und der 2. Punkt steht erneut zur Debatte.

Wenn man häufig auf diese Weise verfährt, eignen sich Schüler/innen Strategien an, die sich bei der Bearbeitung weiterer Themenkreise (auch über das Fach Mathematik hinaus) als nützlich erweisen.

Somit zielt dieser Beitrag auf folgende Module ab:

- Weiterentwicklung der Aufgabenkultur im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht (1)

- Kumulatives Lernen (5)

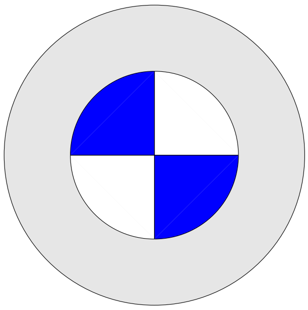
- Fächerübergreifendes und fächerverbindendes Arbeiten (6)

- Verantwortung für das eigene Lernen stärken (9)

Aus der Erarbeitung eines jeden Themenkreises erwächst eine Lernumgebung, die hier an Beispielen verdeutlicht werden soll.

Greifen wir eines der anfangs vorgestellten Logos heraus:

BMW



Ein möglicher Fragenkatalog mit Anregungen:

1. Wie ist dieses Logo aufgebaut?
2. Wie wird dieses Logo gezeichnet?
3. Welche Symmetriebetrachtungen kann man anstellen?
4. Wie groß sind Inhalt und Umfang bestimmter Teilflächen?
   Wir betrachten Anteile von Teilflächen an der Gesamtfläche (Bruch- und Prozentrechnen).
5. Ist dieses Logo “schön“? Begründe deine Antwort.
6. Aus welchen Materialien fertigt man solche Logos?
7. Wie ist dieses Logo entstanden?

Wie ist das Logo aufgebaut?

Die Schüler/innen lernen, sich verständlich auszudrücken. Sie erkennen, dass die Einführung und der Gebrauch von Fachbegriffen ein wichtiges Instrument zum Verständnis und zur raschen Verdeutlichung eines Sachverhalts darstellen:

„Kreislinie, Kreisscheibe, Kreisring, konzentrische Kreise [wie sie auch in bestimmten ebenen Schnitten von Magnetfeldern vorkommen]“

„Strecke, Radius, Durchmesser“

„rechter Winkel, gestreckter Winkel, überstumpfer Winkel, Vollwinkel“

„Kreissektor, Kreisbogen, Kongruenz“

1. Welche Bestimmungsstücke des Logos muss man vorgeben, damit alle Schüler/innen deckungsgleiche Bilder zeichnen?
2. Gib möglichst wenig Bestimmungsstücke so an, dass die Zeichnung eindeutig ausgeführt werden kann.

Welche Symmetriebetrachtungen kann man anstellen?

1. Suche mit einem Taschenspiegel alle Symmetrieachsen des Bildes und zeichne sie ein.
2. Untersuche, ob die Figur drehsysmmetrisch ist:
   a) mit Hilfe zweier kongruenter, auf Folie gezeichneter Bilder, die in der Mitte mit einem Druckknopf zusammengehalten werden.
   b) am Bildschirm mit einem Geometrieprogramm.

Inhalt und Umfang bestimmter Teilflächen
Bruch- und Prozentrechnen

1. Berechne den Anteil eines Sektors an der Gesamtfläche als Bruch (in Prozent). Wie ändern sich die Ergebnisse, wenn man
   a) beide Radien verdoppelt, verdreifacht, usw.?
   b) bei gleichem äußeren Radius R den inneren Radius r halbiert, drittelt, usw.?
2. Welcher Anteil an der Gesamtfläche ist blau (schwarz, nicht weiß) eingefärbt?
3. Berechne den Radius r bei konstantem Außendurchmesser so, dass der Flächeninhalt eines weißen Sektors
   a) $\frac{49}{480}$ oder b) $\frac{1}{4}(25\%)$ des Inhalts der Ringfläche beträgt.

4. Zur Fertigung eines Logos braucht man 2g weiße, 2g blaue und 12g schwarze Farbe.
   a) Wie viele Autologos kann man fertigen, wenn für jede Farbe ein 1kg-Eimer vorrätig ist? Wie viel Farbe bleibt dann übrig?
   Wie viel weiße Farbe hat man dann verbraucht; wie viel blaue Farbe ist übrig?

   b) Wie viele Logos könnte man mit zusätzlicher schwarzer Farbe und den Resten aus weißer und blauer Farbe noch erzeugen?
   Wie viele kg schwarze Farbe braucht man dazu noch?
   c) Wie viele Logos können höchstens gefertigt werden, wenn 19 kg Farbe zur Verfügung stehen?
   d) Ein Großhändler bietet die drei Farbsorten jeweils in 2,5kg-Eimern an: Schwarz zu 30 DM, Weiß zu 50 DM und Blau zu 60 DM.
      i. Es soll Farbe für genau 900 DM so eingekauft werden, dass man damit möglichst viele Logos herstellen kann. Wie viel kg Farbe kann man kaufen? Wie viele Logos werden damit hergestellt?
      ii. Neben weißer und blauer Farbe soll für genau 900 DM möglichst viel schwarze Farbe eingekauft werden. Wie viel kg Farbe kann man jetzt kaufen?

Zu 3.:

Vervierfacht man den jeweiligen Anteil a einer Sektorfläche an der Gesamtfläche, dann erhält man den Anteil des Flächeninhalts des inneren Kreises an der Ringfläche:
$r^2\pi = 4a(R^2 - r^2)\pi \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 4aR^2 - 4ar^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{4a}{1+4a}R^2$
a) $4a = \frac{49}{120}: \quad r^2 = \frac{49}{169}R^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r = \frac{7}{13}R}$
b) $4a = 1; \quad R^2 = 2r^2$, und ein Motiv zur Einführung der reellen Zahlen ist entdeckt.

Zu 4a):

Zur Fertigung von 50 Logos braucht man 100g weiße, 100g blaue und 600g schwarze Farbe.
Eimer mit schwarzer Farbe: 1000 g = 1· 600 g + 400 g
Daraus werden 50 Logos, und 400 g schwarze Farbe bleibt übrig.
400 g schwarze Farbe ergibt 33 Logos, und 4 g schwarze Farbe bleibt übrig.
Man kann also 83 Logos anfertigen.

Zu 4b):

Verbrauch von weißer Farbe: 83 · 2 g = 166 g. Es sind noch 834 g blaue (und ebenso viel weiße) Farbe übrig.
834 g : 2 g = 417; man kann 417 Logos zusätzlich fertigen.

Oder:
Aus 1 kg weißer und 1 kg blauer Farbe kann man 500 Logos fertigen, also 417 zusätzliche Logos.
Zu 417 Logos braucht man 5004 g schwarze Farbe zusätzlich. 4 g sind noch von der ersten Serie übrig. Also braucht man noch 5 kg schwarze Farbe.

Oder:
Wenn man 500 Logos anfertigt, dann ist keine weiße und keine blaue Farbe übrig. Für 500 Logos braucht man 6 kg schwarze Farbe; also müssen noch 5 kg zum ersten Farbeimer dazukommen.

Zu 4c):

Für ein Logo wird 16 g Farbe gebraucht. Aus 19000 $g = 1187 \cdot 16\ g + 8\ g$ Farbe kann man also 1187 Logos anfertigen.

Zu 4d):

s: Anzahl der Eimer mit schwarzer Farbe, analog w und b

Zu 4d)i):

$30s + 50w + 60b = 900 \ \Leftrightarrow\ 3s + 5w + 6b = 90$ (*)
Gleichzeitig gilt nach 4.4.1: $b = w \ \wedge\ s = 6w$ in (*):
$18w + 5w + 6w = 29w = 90 = 3 \cdot 29 + 3 \ \Rightarrow\ w = b = 3 \ \Rightarrow\ s = 18$
Also: $18 \cdot 30\ DM + 3 \cdot 50\ DM + 3 \cdot 60\ DM = 870\ DM$
Es bleibt ein Rest von 30 DM, für den man noch 2,5 kg schwarze Farbe bekommt.
$(18 + 3 + 3) \cdot 2,5\ kg = 60\ kg$. Man kann also 62,5 kg Farbe kaufen.
Die Anzahl der herzustellenden Logos ergibt sich z.B. aus der gekauften weißen Farbe, das sind $3 \cdot 2,5\ kg = 7,5\ kg = 7500\ g$; das ergibt 3750 Logos.

Zu 4d)ii):

1. Möglichkeit:
Lösung mit Hilfe einer Tabellenkalkulation oder eines selbstgeschriebenen Rechenprogramms.

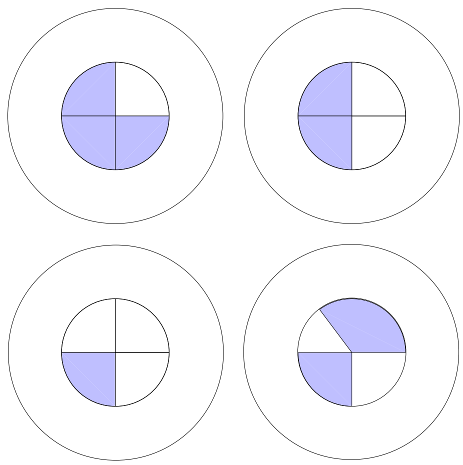
2. Möglichkeit:
$3s + 5w + 6b = 90$. Weil weiße und blaue Farbe mit gekauft wird, gilt neben $s \in N$ auch $b, w \in N$ (*)
$5w + 6b = 90 - 3s \ \geq\ 11 \ \Rightarrow\ s \ \leq\ \frac{79}{3} \ \Rightarrow\ s \ \leq\ 26$ (**)
$s = 26: \quad 5w + 6b = 12 \ \Leftrightarrow\ b = 2 - \frac{5}{6}w$, was wegen (*) nicht geht.
$s = 25: \quad 5w + 6b = 15 \ \Leftrightarrow\ w = 3 - \frac{6}{5}b$, Widerspruch zu (*).
$s = 24: \quad 5w + 6b = 18 \ \Leftrightarrow\ b = 3 - \frac{5}{6}w$, Widerspruch zu (*).
$s = 23: \quad 5w + 6b = 21 \ \Leftrightarrow\ b = \frac{21-5w}{6}$

w muss möglichst klein sein: $w \in \{1;2\} \;\Rightarrow\; b \notin N$
$w = 3 \;\Rightarrow\; b = 1$
Oder an (**) anknüpfend:
$s = 26 - k$ mit $k \in N_o$
$\Rightarrow\; 5b + 6w = 12 + 3k \;\Rightarrow\; b = 2 + \frac{3k-5w}{6}$
Günstigster Fall: $\underline{b = 1} \;\Rightarrow\; 3k - 5w = -6 \;\Leftrightarrow\; k = \frac{5}{3}w - 2 \;\Rightarrow\; \underline{w = 3}$ und $k = 3 \;\Rightarrow\; \underline{s = 23}$

3. Möglichkeit:
$3s + 5w + 6b = 90 \;\Leftrightarrow\; s = 30 - 2b - \frac{5}{3}w$. Da s ganz sein soll, muss $w = 3k$ mit $k \in N$ gelten.
Also: $s = 30 - 2b - 5k$. Damit s möglichst groß wird, muss b=k=1 gelten.
$\Rightarrow w = 3 \Rightarrow s = 23$
In der Tat: $23 \cdot 30\ DM + 3 \cdot 50\ DM + 1 \cdot 60\ DM = 900\ DM$;
$(23 + 3 + 1) \cdot 2,5\ kg = 67,5\ kg$

VARIANTEN

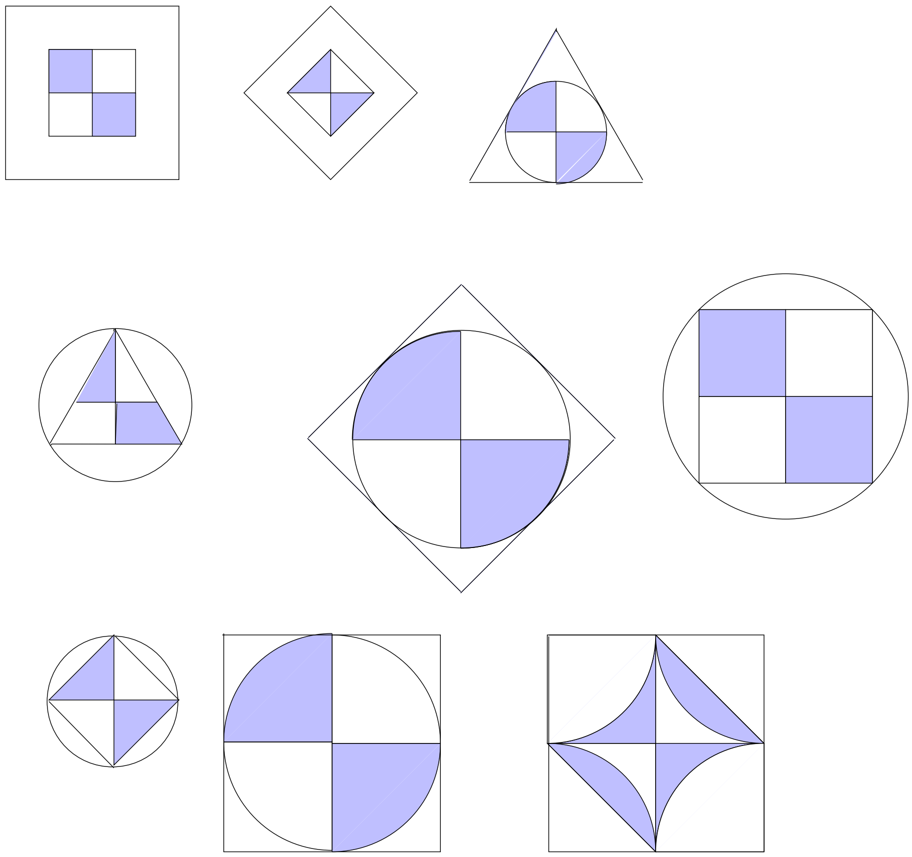
1. Die Sektoren werden anders eingefärbt.
   Die Mittelpunktswinkel der Sektoren werden verändert.



   Die Schüler/innen sollen jetzt passende Fragen aus dem ursprünglichen Katalog entnehmen, z.B. Nr. 1,2,3,4 und 5.
   Einerseits kann man das Gelernte an diesen modifizierten Bildern einüben, andererseits ergibt sich unter anderem das Problem der Berechnung von Sektorflächen mit veränderlichen Mittelpunktswinkeln bei konstantem Radius.

2. Kreisbögen werden zu Ecken, Ecken werden zu Kreisbögen.
   Damit können die Schüler/innen ihrer Phantasie freien Lauf lassen.

   Hier einige Beispiele:



   Die beiden Logos oben links haben noch den doppelten Rand des ursprünglichen Logos übernommen, der in den anderen Beispielen fehlt. Das Logo unten rechts eröffnet einen Vergleich der Flächeninhalte der eingefärbten konkaven und konvexen Anteile.

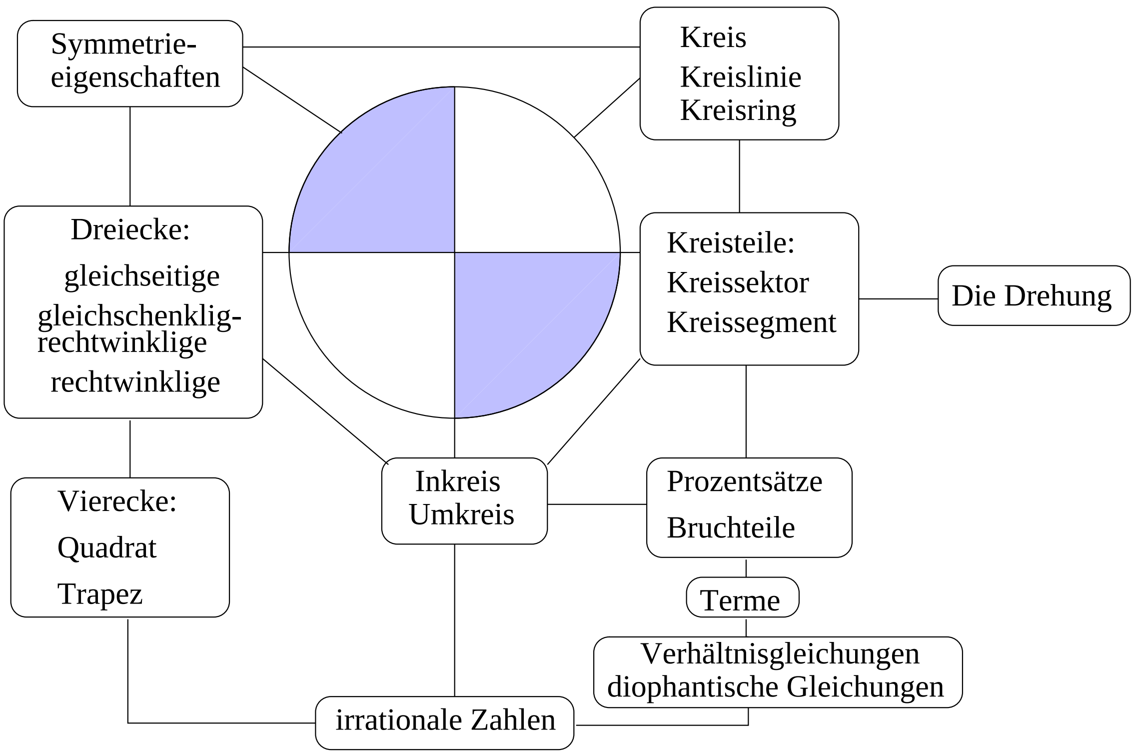
- Auch hier könnte sich für die Schüler/innen erneut die Frage stellen, welche dieser Varianten sie als „schön“, vielleicht sogar schöner als das Original empfinden.

Allein durch diese Beispiele erweitern sich schon die Anwendungsmöglichkeiten des eingangs aufgestellten Fragenkatalogs enorm, z.B. zum Thema

Der Aufbau dieses Logos

- Quadrat, gleichschenkliges (gleichschenklig-rechtwinkliges, gleichseitiges) Dreieck, Trapez
- Kreissegment
- Inkreis, Umkreis

Die Themenbereiche, die sich um dieses Logo ranken und die einerseits eine Wiederholung früherer Stoffgebiete beinhalten, andererseits aber neu zu bearbeiten sind, wachsen durch die Schülerideen zu einer Lernumgebung zusammen. Es wäre verfehlt, wenn man den Schülerinnen und Schülern schon zu Beginn das folgende Diagramm als fertiges Produkt präsentiert hätte.



Es entspricht den Inhalten der Module (1) und (5), dass die Schüler/innen diese Lernumgebung im Laufe ihrer Arbeit selbst fortschreiben und deren Ergebnisse zumindest

in Klassenzimmern präsentieren.
Zu Beginn eines neuen Schuljahres bleibt die Erinnerung an diesen Themenkreis dadurch besonders lebendig, dass er von Schülerinnen und Schülern selbst bearbeitet, ja vielleicht sogar gesteuert worden ist.
Die restlichen Fragen nach dem Material und der Entstehungsgeschichte solcher Logos bieten neue Anregungen:

- Die Besichtigung einer Produktionsstätte und eines grafischen Betriebs
- Der Entwurf eigener Logos auf dem Bildschirm und deren Fertigung z.B. im Werkunterricht

DAIMLER-CHRYSLER

Um das Denken unserer Schüler/innen in Zusammenhängen zu fördern und wach zu halten, sollte dieses neue Logo zunächst im Zusammenhang mit dem vorherigen unter folgenden Aspekten betrachtet werden:

- Welche Elemente in der Zeichnung sind bereits vom BMW-Logo bekannt?
  „Kreislinie, Kreisscheibe, Kreisring, konzentrische Kreise“
  „Strecke, Radius, Durchmesser“
  „Vollwinkel“
  „Kreissektor, Kreisbogen, Kongruenz“
  Die Antwort auf die Frage nach Kreissektoren im Zusammenhang mit der Teilfläche zwischen zwei Sterndritteln und der inneren Kreislinie greift wesentliche Eigenschaften eines Kreissektors erneut auf. Die Beschäftigung damit stiftet zu neuen Überlegungen an.

- Welche Elemente treten neu auf?
  „gleichschenkliges Dreieck, stumpfer Winkel“
  Das DAIMLER-Logo ist im Gegensatz zum BMW-Logo mit drei Löchern versehen.

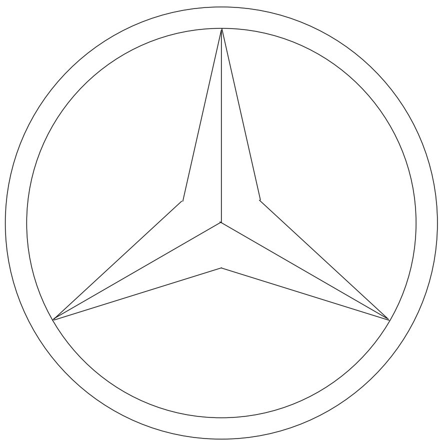
Die Fragen Nr. 1, 2, 3, 4, 5 und 6 des ursprünglichen Katalogs können übernommen und in Form von Arbeitsaufträgen und Aufgaben in den Mathematikunterricht eingebaut werden.

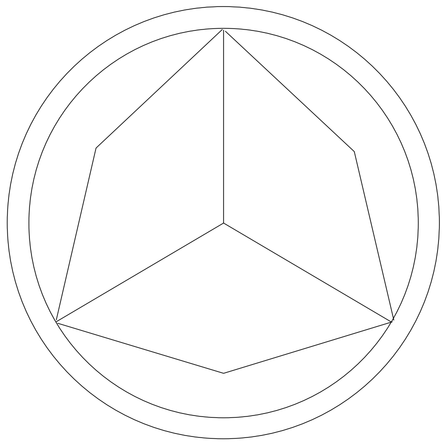
Aufbau und Symmetrieeigenschaften mit Berechnungen

1. Konstruiere das Logo für den Innenradius r = 5cm, die Schenkellänge s = 4,5cm und die Ringdicke b = 0,5 cm.

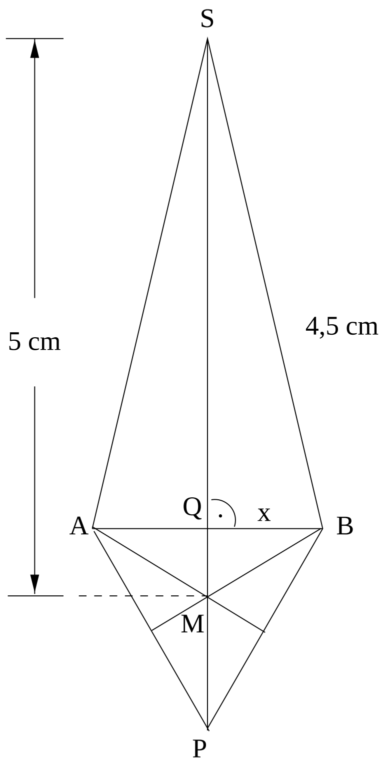
2. Untersuche deine Figur auf Achsen- und Drehsymmetrie. Benutze dazu einen Druckknopf und Folien und einen rechteckigen Taschenspiegel.
3. Das Maß des Winkels an den Spitzen beträgt jeweils 8^o. Berechne das Maß des stumpfen Winkels, den zwei benachbarte Schenkel miteinander einschließen.
4. Wie viel Prozent Abfall erhältst du nach dem Ausschneiden der Flächenteile zwischen Stern und Ring?

HINWEISE:
Zu 1.:
Die Angaben liefern zwei Sterne: den konkaven und einen konvexen:





- Auch an dieser Stelle ist der ästhetische Aspekt der beiden variierten Logos im Zusammenhang mit dem Original von Interesse.
  Das Logo oben rechts suggeriert die räumliche Darstellung eines Würfels mit „Fluchtpunkten“, die vielleicht im Kunstunterricht angesprochen werden können.



Zu 1. und 4.:

$\overline{MS} = 5cm$; $\overline{MQ} = \frac{x}{3}\sqrt{3}$;
$\overline{QS} = 5 - \frac{x}{3}\sqrt{3}$
$(5 - \frac{x}{3}\sqrt{3})^2 + x^2 = 4,5^2$
$25 - \frac{10x}{3}\sqrt{3} + \frac{x^2}{3} + x^2 = 4,5^2 \quad | \cdot 3$
$75 - 10x\sqrt{3} + x^2 + 3x^2 = 60,75$
$4x^2 - 10x\sqrt{3} + 14,25 = 0$
$\sqrt{D} = 6\sqrt{2}$
$x_{1;2} = \frac{1}{8}(10\sqrt{3} \pm 6\sqrt{2})$

$\underline{x_1 = \frac{1}{4}(5\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}$ konkaver Stern
$\underline{x_2 = \frac{1}{4}(5\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}$ konvexer Stern

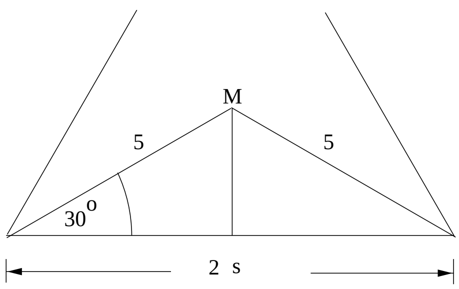
$x_1 \approx 1,10 \qquad x_2 \approx 3,23$

$A_{Stern}(x) = 3 \cdot \frac{1}{2}\ \overline{AB} \cdot \overline{SM} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 5 = \underline{15x}$
Hier:$A_{Stern}(1,1) = \underline{16,5\,cm^2}$
$A_{k_a} = 5,5^2\pi$

<u>Abfall</u>: $\frac{5^2\pi - 16,5}{5,5^2\pi} = 0,653 =$

<u>65,3%</u> $< \ 66,\overline{6}\ \% \ = \ \frac{2}{3}$

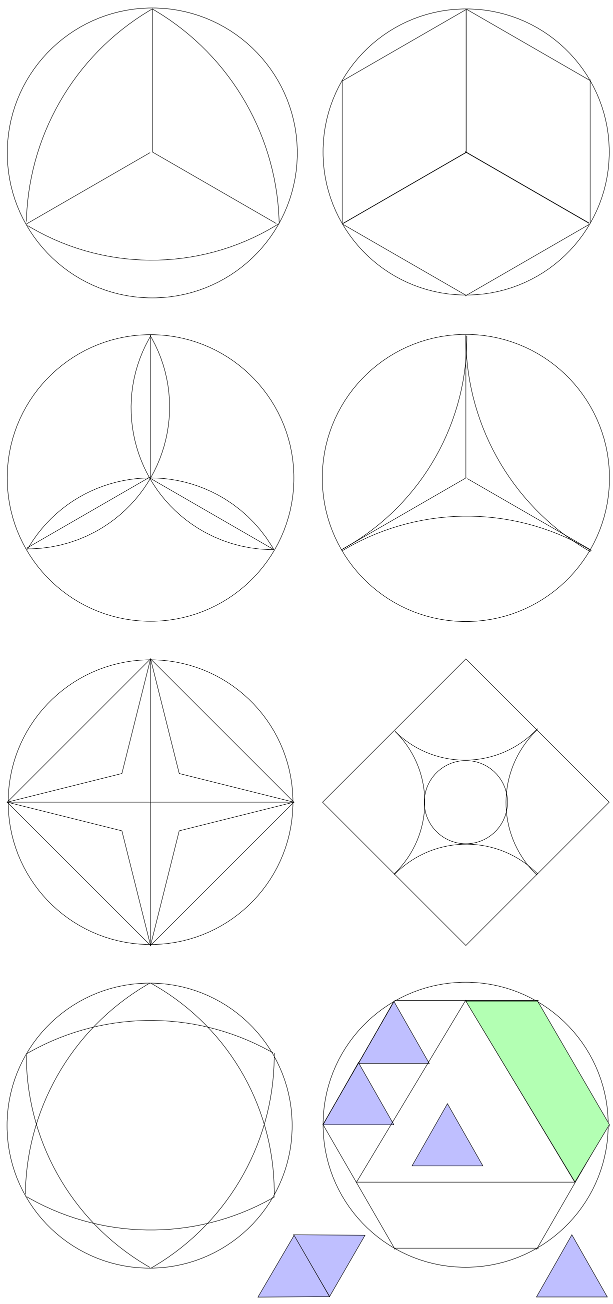
ERGÄNZUNG: Berechne s so, dass der Stern zum gleichseitigen Dreieck wird.
Lösung:



$s = \frac{5}{2}\sqrt{3} \approx 4,33cm$

Die Idee „rund wird eckig, eckig wird rund“ liefert z.B. die folgenden

VARIANTEN



Allein bei der Frage, wie diese Figuren mit Zirkel und Lineal zustande gekommen sind, können die Schüler/innen viel über Winkel, Kongruenzen, Ähnlichkeiten, Achsen- und Drehsymmetrie erforschen.

Diese Bilder wecken darüber hinaus die Erinnerung an „Quadrat, Kreissektor, Umkreis, Inkreis, Kreisbogen und Kreissegment“.
Neue Begriffe wie „Raute, gleichschenkliges Trapez, Kreisbogendreieck, regelmäßiges Sechseck“ gelangen ins Rampenlicht.
Am Logo unten rechts kann man den Vorgang des Messens von Flächeninhalten verdeutlichen:
Einerseits lässt sich z.B. das einbeschriebene regelmäßige Sechseck mit dem danebenstehenden kleinen gleichseitigen Dreieck ausschöpfen:

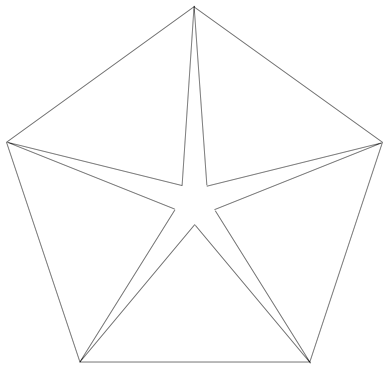
- „Messen“ bedeutet den Vergleich einer Größe mit einer Einheit.
- Eine Flächeneinheit muss nicht quadratische Gestalt haben.
- Die Definition des Begriffs „Messen“ gilt für alle möglichen Größen (Länge, Zeit, Temperatur, usw.)

Anderserseits lässt sich dieses Sechseck mit einer bestimmten Zahl von Rauten, wovon eine unten links dargestellt ist, lückenlos belegen:

- Verdoppelt sich die Flächeneinheit, dann wird die entsprechende Flächenmaßzahl halbiert.
- Allgemein gilt: Ändert man die Einheit einer Größe um den Faktor $k > 0$, dann ändert sich die Maßzahl um den Kehrwert von k.

Die eingangs vorgestellte Lernumgebung bekommt den entsprechenden Zuwachs.

SIMCA-CHRYSLER



Die mit dem DAIMLER-Logo verwandten Strukturen sind nicht zu übersehen.
Die Fragen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 können aus dem ursprünglichen Katalog entnommen und entprechende Aufgaben im Stil der vorhergehenden gestellt werden.

Aufbau, Konstruktion und Symmetrie

Neben den bisher bekannten Fachbegriffen kommen „regelmäßiges Fünfeck und regelmäßiges Vieleck“ hinzu.

1. Zeichne die Figur.
   a) Beginne mit dem regelmäßigen Fünfeck.
   b) Beginne mit dem Stern.
2. Entwürfe:
   a) Entwirf auf dem Bildschirm dieses Logo, so dass der Stern im Zugmodus verändert werden kann.
   b) Drucke das Logo mit dem Stern, dessen Aussehen dir am besten gefällt, aus.

Inhalt und Umfang von Teilflächen

1. Gegeben ist die Seitenlänge a_5 des regelmäßigen Fünfecks und die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks.
   a) Berechne den Flächeninhalt des Sterns in Abhängigkeit von a_5 und h.
   b) Berechne die Länge des Umfangs des Sterns in Abhängigkeit von a_5 und h.

HINWEISE

Wenn r der Radius des Umkreises des regelmäßigen Fünfecks ist, dann gilt:

$r = \frac{a_5}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$ und $A_5 = \frac{a_5^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

Diese Formelgleichungen könnte man nun heranziehen, um einerseits ein Pentagon mit Zirkel und Lineal zu konstruieren und um andererseits z.B. $sin 36^o$, $cos 72^o$ usw. in geschlossener Form darzustellen.

c) Bei welcher Dreieckshöhe nimmt der Stern 30% der Gesamtfläche A_5 des regulären Fünfecks ein?

d) Bei welcher Dreieckshöhe stimmt die Sternfläche mit der Fläche eines Dreiecks überein?

2. Ergänzungen

a) Zeichne das Logo, wenn das Maß eines Innenwinkels in einem gleichschenkligen Dreieck 108^o beträgt.

b) Kann man das Pentagramm in einem Streckenzug zeichnen? Kann man das ganze Logo in einem Streckenzug zeichnen?

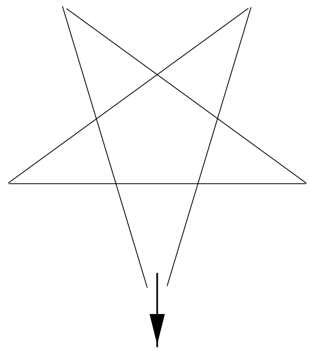
c) Wie sieht der Grundriss des Verteidigungsministeriums der USA aus?

d) Welche Bewandtnis hat es mit dem Pentagramm der Pythagoreer und mit dem Drudenfuß?
Die historische Bedeutung als Symbol zur Abwehr böser Geister kommt z.B. in Goethes „Faust“ zur Sprache:

Mephisto: *Gesteh' ich's nur! Daß ich hinausspaziere*
verbietet mir ein kleines Hindernis:
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle -

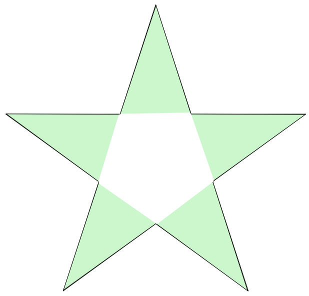
Faust: *Das Pentagramma macht dir Pein?*
Ei, sage mir, du Sohn der Hölle
Wenn das dich bannt, wie kanst du dann herein?
Wie ward ein solcher Geist betrogen?

Mephisto: *Beschaut es recht! Es ist nicht gut gezogen;*
Der eine Winkel, der nach außen zu
ist wie du siehst ein wenig offen.



- Näheres zu Drudenfuß und Pentagon: siehe [1]
- Im Inneren des Pentagramms taucht ein kleines regelmäßiges Fünfeck auf. Neben der „Drehung“ wird der Blick auf die Themenkreise „Ähnlichkeit“ und „zentrische Streckung“ gelenkt.
- Die Bedeutung des Pentagramms reicht offenbar weit über die reine Mathematik hinaus, wenn man Nationalflaggen betrachtet. Es wäre ein Arbeitsauftrag an die Schüler/innen denkbar, die Herkunft und die Bedeutung der Bilder in Flaggen zu erforschen.
  Die geometrischen Strukturen darin eignen sich wiederum zur Diskussion im Mathematikunterricht. Besonders interessant sind die Nationalflaggen von
  - Kuba
  - Jordanien
  - Süd-Korea
  - Panama
  - Tschechien

  Auch alle diejenigen, die sich aus Streifen zusammensetzen, verdienen Beachtung.

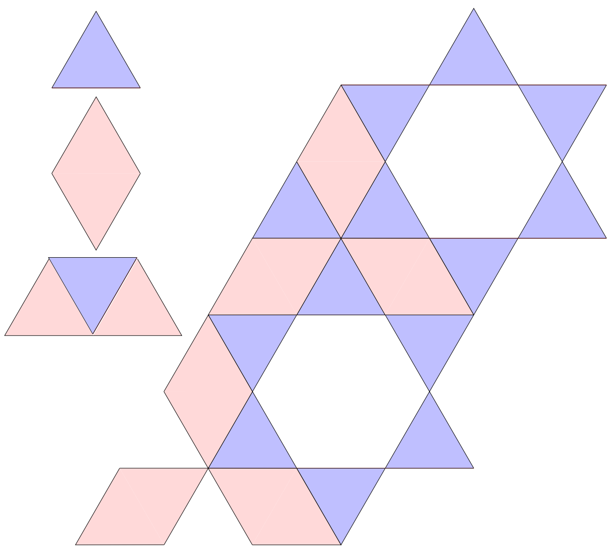


MITSUBISHI

Neben dem auch hier gültigen ursprünglichen Fragenkatalog besteht die Möglichkeit, Zusammenhänge und Unterschiede zu den bereits diskutierten Logos aufzugreifen.
Die enge Verwandtschaft mit dem DAIMLER-Logo ist offensichtlich. Die Themen „gleichseitiges Dreieck“ und „Raute“ können vertieft behandelt werden.

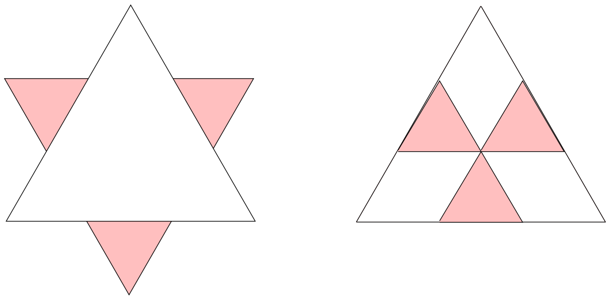
Aufbau, Konstruktion und Symmetrie sowie weitere Anregungen

- Zeichne dieses Logo möglichst rationell.
- Flächenornamente lassen sich auf verschiedene Weise ausmessen:



An dieser Stelle lohnt sich der Rückblick auf das Thema „Messen“, das bereits bei der Diskussion des DAIMLER-Logos analysiert worden ist.

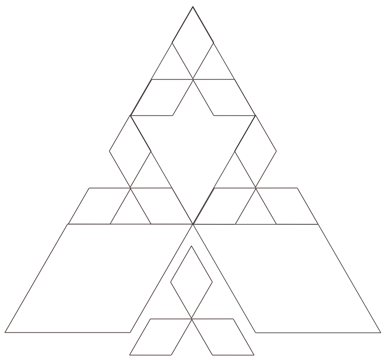
- Es können fraktale Strukturen erzeugt werden, die den Begriff der „Ähnlichkeit“ erneut ins Blickfeld rücken:



Aus beiden Zeichnungen lassen sich Dreiecksfraktale gewinnen: Einmal durch Klappen von gleichseitigen Dreiecken nach außen und einmal nach innen.
Das MITSUBISHI-Logo gehört offensichtlich zum Logo oben rechts.

- Was geschieht, wenn man diese Klappbewegungen an den kleinen gleichseitigen Dreiecken fortsetzt?

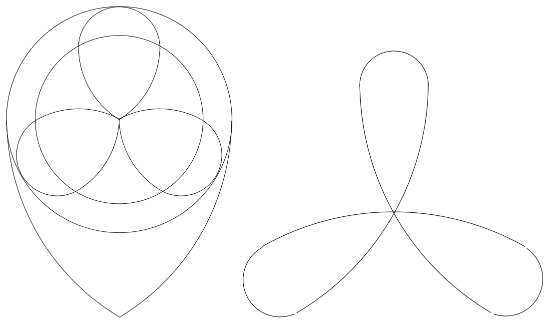
Hier ein Beispiel:



- Manche Schüler/innen haben schon beobachtet, dass solche Neon-Logos auf der Spitze hoher Gebäude als Blickfang rotieren.
Bei der Berechnung der Oberfläche und des Volumens der entsprechenden Rotationskörper, die in der Mitte an einem Punkt zusammengeheftet sind, begegnen uns die schon bekannten Begriffe „Kreislinie, Kreisscheibe, Kreisring“.
Hinzu kommen jetzt: „Kegel, Kegelstumpf, Kegelmantel“.

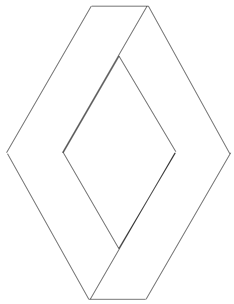
Der Ausbau der ursrünglichen Lernumgebung schreitet fort.

Rundet man Ecken zu Kreisbögen ab, so ergeben sich ähnliche VARIANTEN, wie sie schon in abgeänderten DAIMLER-Logos erkennbar waren:



Neben der Berechnung des Flächeninhalts und des Umfangs der beiden „Kleeblätter" könnte man erneut fraktale Strukturen ins Blickfeld rücken.

RENAULT



Dieses von dem Künstler Victor Vasarely entworfene Wahrzeichen besitzt die Gestalt eines doppelt gedrehten MÖBIUS-Bandes, das ja schon Gegenstand vieler Betrachtungen gewesen ist.
Auf Anhieb ergäbe sich für Schüler/innen ein weites Betätigungsfeld, Geometrie mit der Schere zu betreiben.
Der Fragenkatalog dient hier vorwiegend zur Festigung und zur Vertiefung des bisher Gelernten:

- Gleichseitiges Dreieck, Raute, Winkel
- Symmetrische Strukturen
- Flächenterme und ihre Umformung
- Flächenornamente

Die Flächenornamente führen zu Abbildungen wie

- Achsenspiegelung
- Punktspiegelung
- Verschiebung

Anregungen und Hinweise zum Aufbau, zur Konstruktion und Analyse von Teilflächen

1. Die Raute besteht aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 2,4 cm. Die Entfernung eines Rauteneckpunktes zum jeweils nächstgelegenen Eckpunkt des Sechsecks beträgt jeweils 1,8 cm.
   a) Konstruiere das Bild.
   b) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Sechsecks.

2. Es werden jetzt jeweils drei dieser Logos für eine Musterkollektion bündig so aneinander gelegt, dass ein symmetrisches Bild entsteht.

   a) Zeichne sämtliche Möglichkeiten auf kariertes Papier.

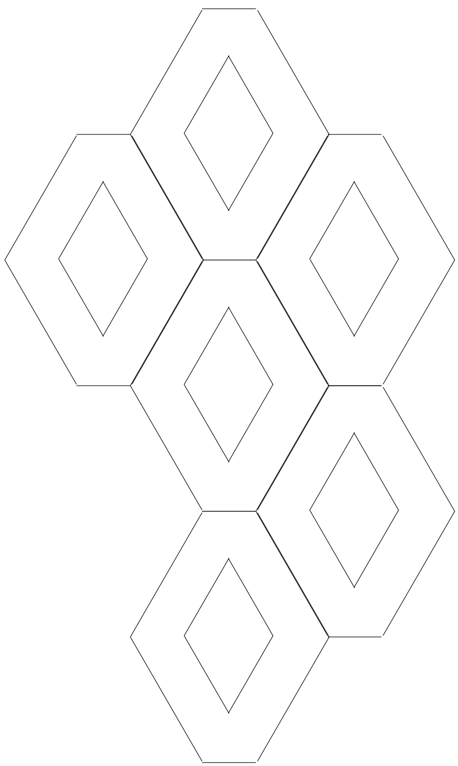
   b) Diejenigen dieser Bilder, die nicht punktsymmetrisch sind, sollen jeweils aus einem rechteckigen, 5 mm dicken Stück Blech so ausgestanzt werden, dass möglichst wenig Abfall entsteht.

      i. Berechne die Abmessungen jedes Bleches auf mm genau und den Abfall in Prozent.

      ii. Um wie viele Kilogramm nimmt der Abfall bei 1000 Blechen zu, wenn die Seiten eines Bleches um jeweils 5 mm zu lang ausfallen? Die Dichte des Eisens beträgt $7,9\ \frac{g}{cm^3}$

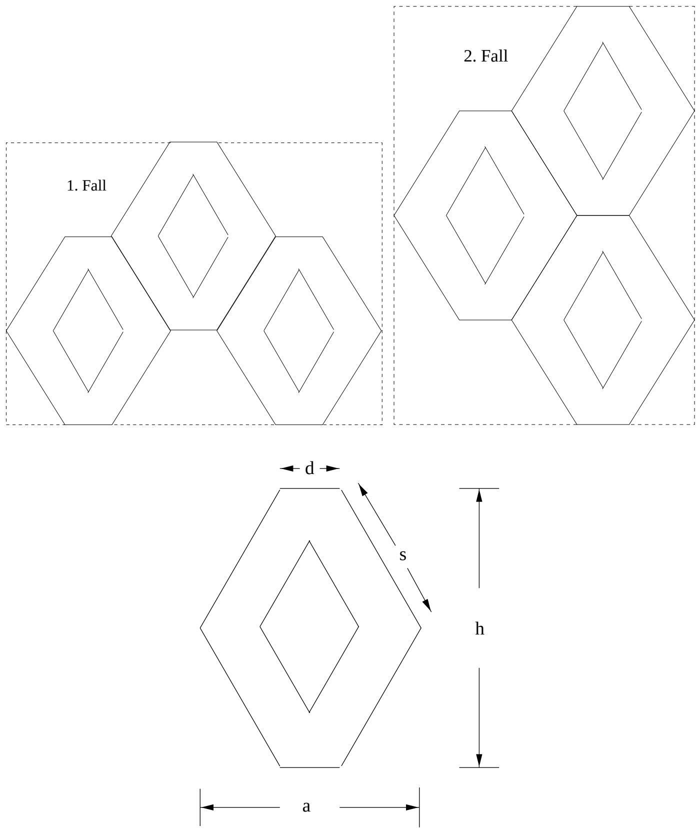
HINWEISE

Zu 2.a)



Aus diesem Bild lassen sich vier verschiedene Möglichkeiten der Anordnung herauslesen.

Zu 2.b)



Allgemein gilt: $h = 2(0,5a\sqrt{3} - 0,5d\sqrt{3}) = \sqrt{3}(a-d)$
Es seien l die Maßzahl der Länge und b die Maßzahl der Breite des Rechtecks.
1. Fall:

$l_1 = 2a + d \qquad b_1 = 1,5h = 1,5\sqrt{3}(a-d)$
$l_1 b_1 = (2a+d) \cdot 1,5\sqrt{3}(a-d) = 1,5\sqrt{3}(2a^2 - 2ad + ad - d^2)$
$\underline{A_1 = l_1 b_1 = 1,5\sqrt{3}(2a^2 - ad - d^2)}$

2. Fall:

$l_2 = a + d + 0,5(a-d) = 1,5a + 0,5d \qquad b_2 = 2h = 2\sqrt{3}(a-d)$
$\underline{A_2} = l_2 b_2 = (3a+d)(a-d)\sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}(3a^2 - 2ad - d^2)}$

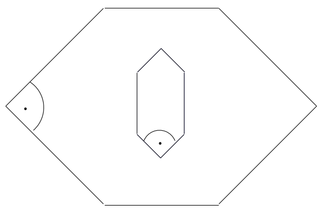
$A_2 - A_1 = \sqrt{3}[(3a^2 - 2ad - d^2) - (3a^2 - 1,5ad - 1,5d^2)] =$
$\ldots = -0,5d\sqrt{3}(a-d) < 0$, weil $a > d$ gilt . Der 2. Fall ist also der günstigere.

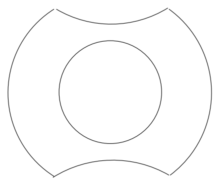
Diese Ausführungen machen deutlich, dass sich die bisherigen Themenkreise noch erweitern lassen:

- Quadratische Terme und ihre Umformung
- Der Vergleich quadratischer Terme

Beispiele für VARIANTEN

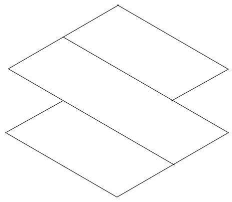
Jeder Konstruktion geht eine erneute Analyse des Bildes voraus, dann können wieder analoge Aufgaben wie vorher bearbeitet werden.





An beiden Flächen können Elemente des Fragenkatalogs erneut aufgegriffen werden.

SUZUKI



Während man beim RENAULT-Logo von einer Raute zwei gleichseitige Dreiecke außen entfernt hat, fehlen hier links und rechts kleine Rauten. Dadurch wird die Breite des Mittelstreifens festgelegt. Diesen Zusammenhang sollten die Schüler/innen selbst finden und formulieren.
Es empfiehlt sich, zunächst nur mit gleichseitigen Dreiecken zu arbeiten.
Mit geeigneten Überlegungen dazu lassen sich die folgenden Themenbereiche erneut ansprechen und einüben:

- Die Kongruenz
- Die Ähnlichkeit
- Der Vorgang des Messens
- Bruch- und Prozentrechnen
- Bruchterme und deren Umformung
- Die Lösung quadratischer Gleichungen
- Die Scherung

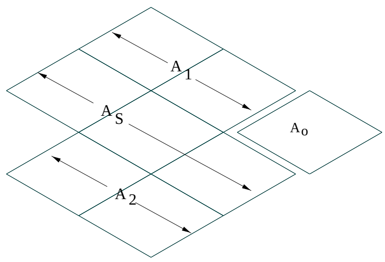
Anregungen und Hinweise zum Aufbau, zur Konstruktion und Analyse von Teilflächen

1. Zwei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge s = 6 cm werden zu einer Raute zusammengefügt. Schneidet man von dieser Raute zwei kongruente Rauten mit der Seitenlänge a = 2 cm ab, so erhält man die oben abgebildete Figur.
   Berechne den Flächenanteil des Mittelstreifens an der Gesamtfläche.
2. Löse die Aufgabe 1. für s = 6 cm und a = 2,5 cm.
3. Löse die Aufgabe 1. allgemein in Abhängigkeit von a und b.
4. Gib ein ganzzahliges Zahlenpaar $(a|s)$ so an, dass die Fläche des Mittelstreifens $\frac{3}{11}$ der Gesamtfläche einnimmt.

5. Von der Figur lassen sich beliebig viele lückenlos zusammenfügen.
   a) Füge für s = 6 cm und a = 2 cm drei dieser Figuren so zusammen, dass das aus ihren Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 gebildete Dreieck spitzwinklig ist.
   b) Zeige: Das Dreieck $M_1M_2M_3$ ist gleichseitig.
6. Das SUZUKI-Logo kann man aus einer Raute mit den Diagonalenlängen e = 15 cm und f = 20 cm dadurch erzeugen, dass man an den Ecken zwei Rauten abgeschnitten hat, deren Flächeninhalt jeweils 24 cm^2 beträgt.
   Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Mittelstreifens.

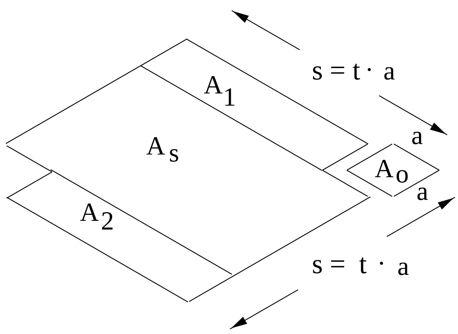
Hinweise

Zu 1.:



Hier gibt es nichts zu rechnen: $\frac{A_S}{A_{ges}} = \frac{3}{7}$.

Zu 3.:



$A_1 = t \cdot A_0 - A_0 \quad\quad mit\ t = \frac{s}{a} > 1\ ; \quad\quad A_S = t(t-2)A_0$
$A_{ges} = 2A_0(t-1) + t(t-2)A_0;$
$\underline{\frac{A_S}{A_{ges}}} = \frac{t(t-2)A_0}{[2(t-1)+t(t-2)]A_0} = \underline{\frac{t^2-2t}{t^2-2}} = \frac{(\frac{s}{a})^2-2\frac{s}{a}}{(\frac{s}{a})^2-2} = \underline{\frac{s^2-2as}{s^2-2a^2}}$ (*)

Hier: $s = 6$ und $a = 2$; $\Rightarrow t = 3 \Rightarrow \frac{A_S}{A_{ges}} = \frac{9-6}{9-2} = \frac{3}{7}$

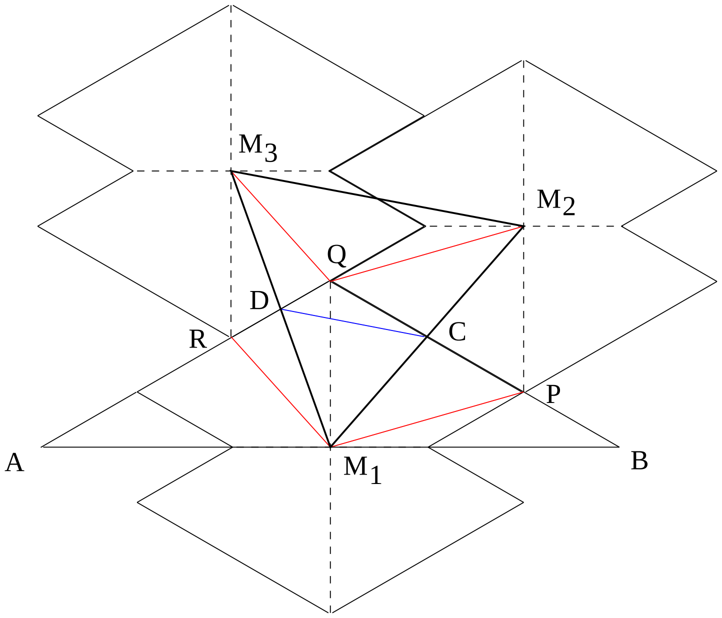
Mit (*) lässt sich die Aufgabe 2 im Handumdrehen lösen: $\frac{A_S}{A_{ges}} = \frac{6}{23{,}5} = \frac{12}{37}$

Zu 4.:

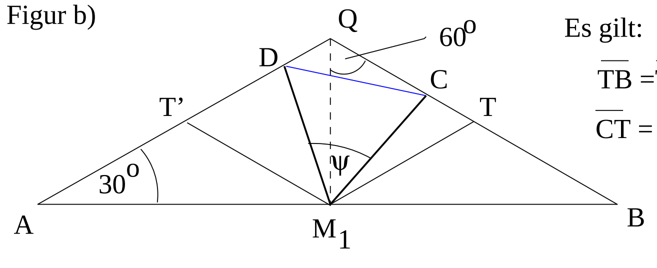
$\frac{t^2-2t}{t^2-2} = \frac{7}{31} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 12t^2 - 31t + 7 = 0 \Rightarrow \underline{t = \frac{7}{3}}$ $[\ \vee\ t = \frac{1}{4} < 1\ ]$

Zu 5.:

Figur a)



Figur b)



Es gilt:

$\overline{TB} = \overline{TQ}$ und

$\overline{CT} = \overline{QD}$

zu Figur a):

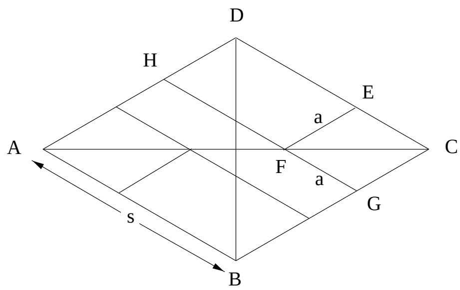
Die Vierecke M_1PM_2Q und M_1QM_3R sind Parallelogramme, denn die Strecken $[M_2P]$, $[QM_1R]$ und $[M_3R]$ sind gleichlang und parallel.

C halbiert die Diagonale $[M_1M_2]$ und D die Diagonale $[M_1M_3]$ $(*)$

zu Figur b):

Die Punkte T und T' sind Seitenmittelpunkte. Der Punkt T ist so gewählt, dass er die Strecke $[QB]$ halbiert.
Dann gilt: $\overline{TQ} = \overline{TB} = 3\ cm$; $\overline{CT} = \overline{QD} = 1\ cm$.
Das Dreieck M_1TQ ist gleichseitig. $\Rightarrow \overline{M_1T} = \overline{M_1Q}$
$\Rightarrow \Delta M_1TC \cong \Delta M_1QD \Rightarrow \psi = 60^o$
Mit (*) ergibt sich die Behauptung.

Zu 6.:



$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 = 150$
$s^2 = 10^2 + 7,5^2 \;\Rightarrow\; s = 12,5$.
Das Viereck ABCD wird mit einem Streckungsfaktor k mit $0 < k < 1$ auf das Viereck FGCE abgebildet:
$A_{FGCE} = k^2 \cdot A_{ABCD} \wedge\ 24 = k^2 \cdot 150$
$\Rightarrow\; k = 0,4$
$\Rightarrow\; a = 0,4 \cdot 12,5 = 5$
$s = 2,5 \cdot a (= 2,5 \cdot 5 = 12,5)$
$\Rightarrow\; A_{HGCD} = 2,5 \cdot 24 = 60 \;\Rightarrow \underline{A_S =} 150 - 2 \cdot 60 \underline{\underline{= 30}}$

$A_{ges} = 2 \cdot 1,5 \cdot 24 + 30 = 102$; $\frac{A_S}{A_{ges}} = \frac{30}{102} = \frac{5}{17} \approx 29,4\% < 33\frac{1}{3}\%$

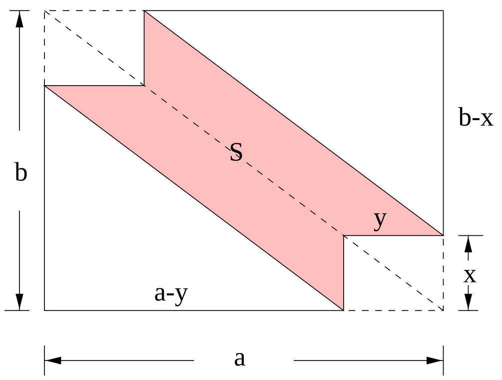
Oder aus der Formelgleichung (*): $\frac{A_S}{A_{ges}} = \frac{25^2 - 20 \cdot 25}{25^2 - 2 \cdot 10^2} = \frac{125}{425} = \frac{5}{17}$

Beispiele für VARIANTEN

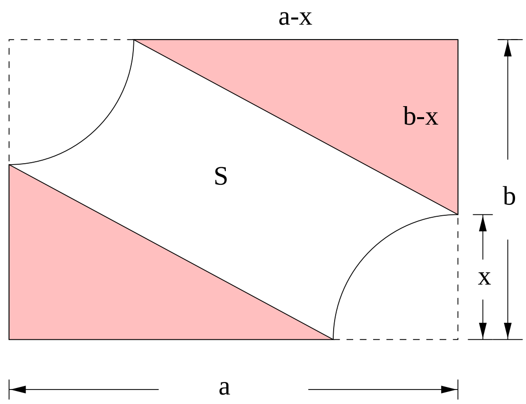
Die Beschäftigung mit den beiden unten stehenden Zeichungen ermöglicht einen Zugang zu den Themenkreisen

- Brüche, Bruchterme und Prozentrechnen
- Extremwerte und quadratische Gleichungen
- Ähnlichkeiten, Vierstreckensatz

Figur a)



Figur b)



Zu Figur a):

Die beiden kleinen kongruenten Rechtecke sind zum großen Rechteck ähnlich:
$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{a}{b}x$
$\underline{A_{ges}(x)} = ab - 2xy = ab - 2x\frac{a}{b}x = \underline{ab - \frac{2a}{b}x^2}$
$\underline{A_S} = A_{ges} - (a-y)(b-x) = ab - \frac{2a}{b}x^2 - ab + ax + by - xy =$
$-\frac{2a}{b}x^2 + ax + ax - \frac{a}{b}x^2; \qquad A_S = 2ax - \frac{3a}{b}x^2 = -\frac{3a}{b}(x - \frac{b}{3})^2 + \frac{ab}{3}$

Damit ergibt sich: $x_0 = \frac{b}{3}$ liefert $A_S(max) = \frac{ab}{3}$.

$A_{ges}(x_0) = ab - \frac{2a}{b} \cdot \frac{b^2}{9} = ab - \frac{2ab}{9} = \frac{7}{9}ab$

$\underline{\frac{A_S(max)}{A_{ges}(x_0)}} = \frac{ab \cdot 9}{3 \cdot 7ab} = \underline{\frac{3}{7} \;\approx\; 42,86\%}$

Zu Figur b):

$A_{ges} = ab - \frac{1}{2}x^2\pi$
$A_S(x) = A_{ges} - (a-x)(b-x) = ab - 0,5x^2\pi - ab + ax + bx - x^2$

$= x(a+b) - x^2(1+0,5\pi) = \ldots = (1+0,5\pi)(x - \frac{a+b}{2+\pi})^2 + \frac{(a+b)^2}{2(2+\pi)}$

$x_0 = \frac{a+b}{2+\pi}$ liefert $A_S(max) = \frac{(a+b)^2}{2(2+\pi)}$

Literatur

[1] Artmann, B.: Die stetige Teilung am regelmäßigen Fünfeck - In: Der Mathematikunterricht - Stuttgart (28) 1982 4. - S. 8-19

[2] Buhrow, J.: Fünfeckskonstruktionen von berühmten Künstlern - In: mathematik lehren - Heft 49 (1991) S. 34-35

[3] Hischer, H.: Entdeckung der Irrationalität des Pentagon - In: Mathematik in der Schule - Berlin 32 (1994) 4. - S. 238-248

[4] Müller, K.P./Wölpert, H.: Anschauliche Topologie - B.G. Teubner - Stuttgart, 1976