Aus Fehlern lernen
und verwandte Themen

Christian Strecker

Lehrstuhl Mathematik und ihre Didaktik
Universität Bayreuth

10. März 1999

Literaturhinweise zu Modul 3

Die Rehabilitierung des Fehlers als Lerngelegenheit sollte ein unterrichtsbezogener Schwerpunkt des Förderungsprogramms sein. Als Unterstützungsleistung sollten einschlägige Arbeiten zu typischen Schülervorstellungen, die für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe I Bedeutung haben, gesichtet und unterrichtsbezogen aufgearbeitet werden.

In diesem Beitrag wird ein Versuch unternommen, die zitierte Anregung aus dem Gutachten zur Vorbereitung des Programms *Steigerung der Effizienz des mathematisch- naturwissenschaftlichen Unterrichts* aufzunehmen.
Zum derzeitigen Stand der Ausarbeitung bedeutet dies nicht viel mehr als eine Übersicht über Arbeiten aus mathematikdidaktischen Zeitschriften und Büchern, in denen vom Umgang mit Schülerfehlern gesprochen wird. In vielen Fällen ist eine weitergehende unterrichtsbezogene Aufarbeitung an dieser Stelle nicht erforderlich, da die zitierten Arbeiten vorwiegend aufgrund ihrer Praxisnähe ausgewählt wurden und eine Anpassung auf die aktuelle Klassen- und Unterrichtssituation ohnehin von der jeweiligen Lehrkraft selbst vorgenommen werden muss. Auch kann die Lektüre der hier vorgelegten Hinweise nicht die Lektüre der jeweiligen Originalarbeiten ersetzen, sondern lediglich der Vorauswahl dienen.

Auf die Besprechung allgemein gehaltener Beiträge v.a. aus der pädagogischen Psychologie wurde in dieser Fassung verzichtet. Auch wird mit diesem Papier nicht der Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

1 Das Wichtigste zuerst

Eine Erkenntnis, die sich in verschiedenen unabhängigen Zugängen zur Thematik *Schülerfehler* immer wieder finden lässt, soll am Beginn anhand der binomischen Formeln verdeutlicht werden.

Echte Fehler sind fast immer das Ergebnis eines eigenständigen (kreativen) Denkprozesses. Deshalb sind Korrekturen fast nie erfolgreich, wenn sie nicht am Denkvorgang des Schülers ansetzen, sondern nur das Ergebnis desselben berücksichtigen.

Eine alltägliche Situation und ihre Konsequenzen

Sie alle unterrichten – völlig unabhängig von Bundesland oder Schultyp – von Zeit zu Zeit das Lösen von quadratischen Gleichungen. Welche Zugangswege und

Veranschaulichungen dabei auch gewählt werden – früher oder später kommt die *quadratische Ergänzung* und mit ihr die Notwendigkeit für den Schüler, sich an die *binomischen Formeln* zu erinnern. Und an dieser Stelle gibt es mit Sicherheit jedesmal wieder Umformungen folgender Art zu beobachten: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Dies ist unsere Ausgangssituation.

Ein typischer Schülerfehler ist aufgetreten. Wie reagieren Sie?

Es ist klar, dass hier das bloße Korrigieren durch den Lehrer oder das Korrigierenlassen durch Mitschüler nicht ausreichen dürfte. An dieser Stelle findet man in Schulbüchern und in der pädagogischen Praxis mindestens zwei etwas ausführlichere Korrekturmöglichkeiten, aus denen je nach Situation und Zeit die passendere ausgewählt wird.

1. Der Lehrer fordert dazu auf, ein konkretes Zahlenbeispiel zu betrachten und liefert damit *einen* Fall, der als Gegenbeispiel dienen kann.
2. Er beweist direkt entweder
   a) durch Ausmultiplizieren von $(a+b)\cdot(a+b)$ oder
   b) durch geometrische Veranschaulichung an der Fläche des Quadrats,

   dass jeweils noch der gemischte Term $2ab$ auftreten muss.

Ein oder zwei Stunden später tritt aber – sehr zu Ihrer Enttäuschung – der gleiche Fehler wieder auf, wobei diesmal vielleicht ein anderer Schüler $(3u+v)^2 = 9u^2+v^2$ berechnet. Hier fällt es schon schwerer, mehr Zeit zu investieren, als zu einer direkten Korrektur nötig ist. Ein Quadrat wird man hier kaum mehr zeichnen und Teilflächen schraffieren. Dieser Schüler hat - vorausgesetzt er hat einigermaßen aufgepasst - eben seine Schwierigkeiten mit dem Verständnis der Mathematik. Die binomischen Formeln muss er sich einfach merken, notfalls auch einige Male abschreiben und in einigen Zusatzaufgaben einüben, ohne sich weitere Gedanken über ihren Sinn machen zu müssen.

Solche Episoden prägen den Mathematikunterricht wohl seit es ihn gibt. Generationen von Schülern machen an den gleichen Stellen die gleichen Fehler. Sollte dies auch daran liegen, dass unsere eben geschilderten Korrekturverfahren nicht ausreichend sind? Sicher eine unangenehme Vorstellung.

Aber diese Korrekturverfahren wirken wohl nur unter zwei Voraussetzungen. Entweder war der Glaube des Schülers an die Richtigkeit seiner Antwort ohnehin nicht allzu stark oder der Fehler geschah eher zufällig und war nicht das Ergebnis eines echten Denkprozesses. Dann besteht – in der Terminologie der Konditionierungspsychologen – eine Chance auf Löschung des Irrtums.

Was aber, wenn der Schüler sich seine Fehlmeinung durch eigenes Denken hart erarbeitet hat und daran wirklich glaubt?

Um hier einen Ansatz finden zu können hat Lawrence N. Meyerson Lehramtsstudenten aufgefordert, die Aussage $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ zu begründen und dabei so zu tun, als ob sie korrekt sei. Er erhielt unter anderem folgende Argumente (zitiert nach seinem Aufsatz *mathematical mistakes* in der Zeitschrift *Mathematics Teaching, 9/1976*), die manchmal nicht ganz einfach zu widerlegen sind:

1. Es könnte ja sein, dass es ein Distributivgesetz bezüglich Quadrieren und Addition gibt.
2. Induktion in der Form: $(a+b)^1 = a^1 + b^1 \rightsquigarrow (a+b)^2 = a^2 + b^2$.
3. Rein formelle Anwendung des Pythagoras. Aus $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich für $c = a + b$ die Behauptung.
4. Beweis durch Aussprache. Ein Merksatz wie: *Die Summe zweier Quadrate ist gleich dem Quadrat der Summe* klingt korrekt, insbesondere, wenn man ihn schnell ausspricht.
5. Es gilt $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. Da nun die Multiplikation nur eine verkürzte Schreibweise für die Addition ist, ...
6. Zur Umformung einer Gleichung wird dem Schüler eingepaukt, was rechts geschieht, muss auch links geschehen!
   Die Gleichung $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ist korrekt. Wird nun sowohl links als auch rechts aus jedem Minuszeichen ein Pluszeichen gemacht, so ist die Aussage nachgerechnet.

Auch wenn hier sicher manches als Schülerüberlegung kaum vorkommen dürfte, so finden Schüler möglicherweise wieder andere „Argumente“, wenn sie nach einer Begründung ihrer Antwort gefragt werden. Und damit sind wir beim Kern der Folgerungen, die aus dem bisher beschriebenen Szenario zu ziehen sind.

Wer eine falsche Schülerantwort durch Mitschüler korrigieren lässt oder mit ausführlicherer Begründung selbst korrigiert, verhält sich ähnlich wie ein Arzt, der Symptome behandelt, ohne die eigentliche Krankheit zu erkennen. Auch wenn dieses Bild nun etwas drastisch gewählt sein mag, so lässt sich daraus doch ein Handlungsmuster für den Lehrer ableiten.

Die erste Reaktion des Lehrers auf eine falsche Schüleraussage (und gelegentlich – damit sich ein Schüler nicht daran gewöhnt, Nachfragen als sicheres Zeichen für eine Fehlantwort anzusehen – auch auf eine richtige) sei immer die Frage **„Warum?“** und dann die Aufforderung an die ganze Klasse, nach dem Fehler *in der Argumentation* des Schülers zu suchen und so das noch unverstandene „Vorwissen“ zu ermitteln, das benutzt wurde.

Eine solche Situation kann mit Gewinn für das vertiefte Verständnis weiter ausgebeutet werden, indem beispielsweise nach den Konsequenzen gefragt wird, die es nach sich ziehen würde, wenn die Falschaussage korrekt wäre.
Im Beispiel würde eine Gültigkeit von $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ für alle Zahlen nach sich ziehen, dass das Produkt von zwei verschiedenen Zahlen immer Null würde (damit der gemischte Term verschwindet). Welche Folgen hätte dies? Gibt es Zahlen a und b, so dass $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ korrekt ist?

Dieses Begründenlassen kostet sicher nicht viel mehr Zeit als eine ausführliche Korrektur durch den Lehrer, hat aber den Vorteil, dass sich die Schüler selbst aktiv mit den Denkfehlern auseinandersetzen müssen und schult so das mathematische Verständnis.

Eine andere verbreitete Fehlmeinung, die Meyerson von seinen Studenten begründen ließ, war die Addition von Brüchen als getrennte Addition von Zähler und Nenner. Neben rein mathematischen „Begründungen“ für $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ wurde hier auch mit einer Analogie aus dem täglichen Leben gearbeitet, die zeigt, dass solche in der Schule gern genutzte Veranschaulichungen ihre Grenzen haben.

Ein Fußballtorwart, der in einem Spiel drei von fünf Elfmetern gehalten hat und der im nächsten Spiel zwei von drei Elfmetern hat halten können, kann seinen Ruf als Elfmetertöter mit einem Gesamtergebnis von fünf aus acht untermauern. Also ist hier – wenn man Brüche zur Beschreibung von Verhältnissen nutzt – tatsächlich $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \dots$

Eine Widerlegung (die beispielsweise dadurch erfolgen kann, dass ja zum Vergleich der einzelnen Spiele eine geeignete Gewichtung vorgenommen werden muss) sei dem Leser überlassen!

Ein möglicher Weg, um zu einer besseren Nutzung von Schülerfehlern für den individuellen Lernfortschritt zu kommen, wird von mir auch in einigen Anmerkungen und Erläuterungen zum Konzept der *Lerntagebücher* aufgezeigt. Da diese Thematik jedoch schwerpunktmäßig dem eigenverantwortlichen Lernen unter Zuhilfenahme der schriftlichen Dokumentation zuzuordnen ist und die Fehlerkultur hier eher ein willkommenes Nebenprodukt ist, findet der Leser diese Informationen in dem Beitrag *Verantwortung für das eigene Lernen stärken* von C. Strecker, der in der gleichen Materialaussendung enthalten ist.

2 Literaturübersicht

In diesem Abschnitt werden in ungeordneter Folge Aufsätze zur Thematik *Schülerfehler* genannt und mehr oder weniger ausführlich referiert. Der Leser kann sich so die Arbeiten heraussuchen, die zu der für ihn gerade aktuellen Situation am besten geeignet scheinen. In den meisten Fällen finden sich auch weitere Literaturhinweise, denen der Autor dieser Übersicht in einer zweiten Fassung nachgehen wird. Vielleicht können bis dahin auch Reaktionen oder weitere Empfehlungen oder Warnungen aus dem Kollegenkreis (per e-mail an christian.strecker@uni-bayreuth.de) eingearbeitet werden. Sobald der Umfang groß genug ist, wird außerdem eine gewisse Systematik anzustreben sein.

2.1 Fehleranalysen im Mathematikunterricht

Dieses Buch (erschienen 1979 bei Vieweg) von H. RADATZ, einem der wenigen echten Spezialisten auf dem Gebiet der Fehleranalyse, liefert zunächst anhand ausgewählter Beispielfälle eine sehr ausführliche Systematik von Fehlertypen (s. hierzu auch 2.2). In der Folge gibt RADATZ eine Überblick über die historische Entwicklung der Fehleranalyse und versucht, zu den vielen denkbaren Fehlertypen jeweils angemessene Anregungen für eine Therapie zu geben.

Allerdings gibt er auch bereits im Vorwort die Grenzen und Schwierigkeiten der Fehleranalyse zu bedenken:

> „Nicht alle Schülerfehler sind im Hinblick auf die Fehlertechnik analysierbar, erst recht nicht das zugrundeliegende Ursachengeflecht. Die möglichen Ursachenfelder sind im Einzelfall oft schwer voneinander zu trennen, sie stehen vielmehr in einer engen Wechselbeziehung zueinander, d.h. die Ursachenfaktoren sind nicht einheitlich und nur selten eindeutig. Die gebräuchlichen Methoden zur Fehleranalyse sind nicht voll befriedigend. Es ist überaus schwierig, den Prozeßcharakter des Lösungsvorgangs zu erfassen. Das Lösungsprodukt allein kann meistens ausreichende Information für eine Erklärung der Fehlertechnik liefern, aber nur selten für eine Erklärung der zugrundeliegenden Fehlerursachen. So können identische Fehlerergebnisse aus sehr divergenten Lösungsprozessen resultieren, was oft durch diagnostische Interviews deutlich wird.“

Eine Fülle an Beispielen für Schülerfehler v.a. bei Grundrechnungen sowie ein umfassendes Literaturverzeichnis runden das Buch ab.

Von Radatz stammt auch ein Beitrag für das *Journal für Didaktik der Mathematik(1), 1980*, in dem unter dem Titel *Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht* eine auf das Wesentliche reduzierte knappe und damit angenehm zu lesende Darstellung der Erkenntnisse aus dem eben genannten Buch gegeben wird.

Die Berücksichtigung der Denkvorgänge, die zu einem Fehler geführt haben, wird hier einmal mehr eindringlich in den Mittelpunkt der vom Lehrer zu leistenden Korrekturarbeit gerückt.

2.2 Klassifikation von Fehlern

Es gibt – wie bereits erwähnt – eine Vielzahl an Möglichkeiten, Schülerfehler zu ordnen und Systematiken zusammenzustellen. Hier weichen die verschiedenen Autoren allerdings in der Wahl ihrer Kategorien teilweise weit voneinander ab (man vergleiche beispielsweise das Buch von Radatz und den Aufsatz „Using errors as Springboards for the learning of mathematics“ von R. Borasi in *Focus on learning problems in Mathematics*, Herbst 1985).

Hier hat den Verfasser dieses Beitrags bislang aufgrund ihrer noch relativ großen Praxisnähe die Einteilung von J. Schaffrath in dem Aufsatz *Gedanken zur Psychologie der Rechenfehler* in *Der Mathematikunterricht 3, 1957, Heft 3, S.5* am ehesten überzeugt, zumal bei den jeweiligen „Fehlerklassen“ meist Beispiele und mögliche Ursachen angegeben sind. Hat der Lehrer durch Begründenlassen der Schülerantwort die Ursache gefunden und die zugrunde liegende Denkweise ermittelt, so liefert der Aufsatz tatsächlich eine Erweiterung des Handlungsrepertoires. An dieser Stelle seien die Fehlertypen nach Schaffrath aufgelistet:

- Rechenfehler durch falsche Auffassung
- Rechenfehler durch falsche Assoziierung
- Rechenfehler durch Perseveration
- Rechenfehler durch die Enge des Bewusstseins
- Psychophysisch bedingte Rechenfehler
- Emotional bedingte Rechenfehler
- Rechenfehler durch Aufmerksamkeitsmängel
- Noetisch bedingte Rechenfehler (Denkfehler)
- Durch Überforderung bedingte Rechenfehler

- Durch die Lehrerpersönlichkeit verursachte Fehler
- Sonstige Rechenfehler

Hierzu zwei kurze Begriffserklärungen:
Perseveration meint ein Beharren bei bereits Vorhandenem, was sich v.a. bei fortschreitender Ermüdung in Fehlern folgender Art niederschlägt: $7 \cdot 6 = 46$ (die Ziffer 6 perseveriert) oder $3354 \cdot 2 = 7708$ (gedankenlose Wiederholung von „zwei mal drei ist sechs, eins gemerkt gibt sieben“) oder auch Abschreibfehler, bei denen aus 317307 die Zahl 317317 wird.
Noetisch bedingt sind v.a. die sog. Denkfehler, die beispielsweise beim Rechnen mit benannten Zahlen oder bei eingekleideten Aufgaben eine Rolle spielen, wenn Rechentechnik nur oberflächlich angeeignet wurde und im Kontext einer Aufgabe nun gedankenlos benutzt wird. Auch Fehler, wie das Kürzen von $\frac{3x^2}{3x^2} = 0$ oder das Verwechseln von a^3 mit $3a$ werden von Schaffrath auf ähnliche Weise gedeutet.

Eine etwas knappere Auflistung von Fehlertypen gibt Günter Pippig in *Rechenschwächen und ihre Überwindung in psychologischer Sicht* (*Mathematik in der Schule 13, 1975*). Leider wird auf echte Denkfehler hier nicht eingegangen.

Eine ausführliche Beschreibung der Konstruktion und Durchführung diagnostischer Tests stellt der Aufsatz *Schülerschwierigkeiten in Algebra* von G. Loercher dar, der im Jahrbuch 1986 (Mathematikunterricht in Finnland) erschienen ist. Bei diesem Artikel handelt es sich um einen Forschungsbericht mit dem Ziel, die gewöhnlichsten algebraischen Schwierigkeiten bei Realschülern in den Klassenstufen 7 und 8 zu finden. Im ersten Teil werden Anforderungen im Algebraunterricht der Sekundarstufe I und Schülerschwierigkeiten in einem eingegrenzten algebraischen Teilgebiet analysiert. Dann erfolgt die Schilderung über Konstruktion diagnostischer Tests.
Im dritten Teil werden die Testergebnisse von einigen hundert Schülern gegeben (Schwierigkeitsfaktoren, durchschnittlicher Zeitbedarf, Fehleranalyse).
Nach der Diskussion der Ergebnisse wird untersucht, wie die Ergebnisse Lehrern und Schülern beim Abbau der algebraischen Schwierigkeiten helfen könnten.

2.3 Der Mathematikunterricht 31, Heft 6/1985: Themenheft: „Fehleranalysen“

Dieses Heft enthält sechs Aufsätze zur Thematik der Schülerfehler sowie eine Fülle an Hinweisen auf weiterführende Literatur. Ich zitiere aus der Einführung:

> Die Beiträge im vorliegenden Heft befassen sich sowohl mit den Schülerfehlern als auch mit den Denkprozessen, die sie verursacht haben; also

> mit den Fragen, wie man Fehler, fehlerhafte Strategien und Denkprozesse, die zu Fehlern führen, erkennen, bewusst machen und wie man aus ihnen lernen kann. [. . .] In diesem Heft werden Schülerfehler aus verschiedenen Bereichen des Mathematikunterrichts behandelt, auch die Untersuchungsmethoden unterscheiden sich. Alle Beiträge beruhen jedoch auf eigenen empirischen Untersuchungen der Autoren, und sie sind dem doppelten Ziel verpflichtet: sowohl über Forschungsergebnisse zu berichten als auch Hilfen für die Praxis des Mathematikunterrichts zu geben.
> K. Hasemann behandelt Schülerfehler in der Bruchrechnung und versucht zu ergründen, welche individuellen Vorstellungen von den Brüchen zu diesen Fehlern geführt haben. Bei der Analyse „klinischer Interviews“ mit Hauptschülern lassen sich sehr unterschiedliche Vorstellungen der Schüler über die mathematischen Begriffe und Regeln, mit denen sie arbeiten, nachweisen.
> H. Radatz hebt in seinem Beitrag über Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht die Bedeutung der Fehler als notwendige Zwischenstation im Lernprozess hervor und verweist auf die damit gegebenen Möglichkeiten des Lehrers, Lern- und Lehrschwierigkeiten zu erkennen und Hinweise auf Hilfs- und Differenzierungsmöglichkeiten zu gewinnen.
> K. Hart berichtet über mehrere Forschungsprojekte, die am Chelsea College der Universität London durchgeführt wurden. Im Mittelpunkt ihres Beitrags steht die Frage, wie man die Ergebnisse ihrer Untersuchungen in der Schulpraxis anwenden kann.
> N. Sommer stellt die Fehleranalyse als ein Instrument mathematikdidaktischer Forschung in den Mittelpunkt seiner Überlegungen. Seine Analysen dienen der Untersuchung kognitiver Prozesse beim Mathematiklernen und der Evaluation von Mathematikcurricula. Er demonstriert beides am Beispiel der Auswirkungen einer Unterrichtsreihe über nichtdezimale Stellenwertsysteme auf das Rechnen im Dezimalsystem, wobei die Auswirkungen zweier Lehrgänge (Bündeln bzw. Zählwerke) verglichen werden.
> G.Becker behandelt „Fehler in geometrischen Beweisen bei Schülern der Sekundarstufe I“; in diesem Beitrag geht es insbesondere um Klassifizierungen von Beweisfehlern, und zwar im Hinblick auf Fehlerursachen, die einerseits in der Person des Schülers zu suchen und andererseits bereichsspezifisch sind.

Obwohl letztlich alle Beiträge lesenswert sind, ist mein persönlicher Favorit der Aufsatz von K. Hasemann.

2.4 Mathematik Lehren 8,1984, Themenheft „Fehler“

Auch hier zitiere ich wieder aus der einführenden Inhaltsübersicht:

> Fehler werden nur selten als Quelle neuer Einsichten genutzt – gleich ob sie vom Schüler, Lehrer oder im Schulbuch begangen werden. Die Beiträge in diesem Heft möchten dazu anregen, mit Fehlern und Fehlleistungen in einer produktiven Weise umzugehen und sie zum Anlaß und Ausgangspunkt für interessante Unterrichtsstunden zu nehmen.

In seinem Basisartikel *Ich denke, also irre ich* gibt L. Führer eine kursorische Darstellung der Fehlerforschung von der Psychoanlyse bis zur Gestaltpsychologie und einen Überblick über Fehlertypen (wobei hier von anderen Autoren auch andere Klassifizierungen vorgenommen werden, siehe 2.2).

An die Grundschullehrer (aber nicht nur!) richten sich die Beiträge *Erkennen Sie die Strategie* (Jansen, Zimmermann), in dem anhand von Beispielmaterial nach den zugrundeliegenden Denkvorgängen bei Fehlern in schriftlichen Grundrechnungen gesucht wird, und *Wie alt ist der Kapitän?* von H. Freudenthal, der anhand von unsinnigen Textaufgaben, die dennoch durch reinen Formalismus „berechenbar“ scheinen, eine Reihe von *„Fragen ohne Antwort“* stellt.

Vorwiegend an Lehrer in der Sekundarstufe I aller Schularten richten sich fünf weitere Beiträge. Von K. Hürten stammt *Lehrer machen Fehler*. Hier wird u.a. am Beispiel einer mit Zirkel und Lineal nicht lösbaren Dreieckskonstruktion oder einer seltsamen Scheitelpunktsbestimmung gezeigt, wie Fehler vom Lehrer absichtlich in den Unterricht eingebaut werden können, um Schüler zu gründlichem Lernen anzuhalten.
Der Beitrag *Addieren (Subtrahieren) von Dezimalzahlen – kein Problem* von K. Daubert gibt einen Überblick über Fehlertypen und deren jeweiligen Ursachen beim Umgang mit Dezimalzahlen. Sein Fazit: „Der Teufel steckt im Komma!“
Der Beitrag *Manchmal stimmt es doch* von Lutz Führer gibt eine kurze Zusammenfassung des Aufsatzes *Mathematical Misteaks* (sic!) von R. Carman, der hier unter 3 kurz referiert wird.
Über Korrekturen und Berichtigungen im Zusammenhang mit schriftlichen Leistungserhebungen finden sich Anregungen in *Das Ende vom Lied*.
In *Widersprüche und Trugschlüsse als Unterrichtsmittel* wird anhand dreier origineller Beispiele aus dem Geometrieunterricht (Winkelsumme im Dreieck oder Flächeninhalt eines Parallelogramms) gezeigt, dass Schüler durch Fehler und Widersprüche innerhalb ihres vermeintlichen Kompetenzfeldes stark motivierbar sind.

Aus dem Oberstufenunterricht stammen schließlich die Beispiele der beiden Artikel *Irrwege zur Stochastik* (Geburtstagsparadoxon und andere Trugschlüsse des

gesunden Menschenverstandes bzw. missbräuchliche Anwendungen[1] als Aufhänger) und *Fehler im Analysisunterricht*, in denen wiederum dazu aufgerufen wird, es nie bei dem Aufdecken und Korrigieren des Fehlers zu belassen, sondern seinen Ursachen nachzuforschen.
Anhand von vier historischen Beispielen für Fehler bei Leibniz, Euklid oder Euler machen sich D. Laugwitz und D. Spalt Gedanken über die mathematische Strenge und das entwicklungsfördernde Potential von Ungenauigkeiten.

2.5 Textaufgaben

Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben

In diesem Aufsatz im *Journal für Mathematikdidaktik 4, 1983, S.205f.* untersucht H. Radatz vor allem drei Fragestellungen:

- Bereitet ein unterschiedlicher semantischer Hintergrund von eingekleideten Additions- und Subtraktionsaufgaben auch unterschiedliche Lösungsschwierigkeiten?
- Welche Fähigkeiten und welche Berechnungsstrategien zeigen Kindergartenkinder und Schulanfänger beim Bearbeiten von sog. Rechengeschichten?
- Entwickelt sich im Laufe der Grundschulzeit eine veränderte Einstellung gegenüber sprachlich formulierten Rechenproblemen?

Aus der Untersuchung von lehrreichem Beispielmaterial kommt er zu folgenden Schlussbetrachtungen:

> [...] Der zuletzt dargestellte Untersuchungsaspekt [...] bestätigt, dass jüngere Kinder mit weniger Schul- bzw. Mathematikerfahrung Sachaufgaben sorgfältiger analysieren. Die Einstellung der Schüler wird ganz offensichtlich durch den Mathematikunterricht geprägt. Bestätigt wird auch die Erkenntnis, dass insbesondere die Arithmetik und ihre Anwendungen von sehr vielen Grundschülern als eine Art Spiel mit künstlicher Regelhaftigkeit und ohne besondere Beziehungshaltigkeit

[1] Zu dem Themengebiet *Gewollter oder unabsichtlicher Betrug durch Statistik* sind eine Reihe von Büchern auf dem Markt. Ohne weitere Kommentierung sei hier lediglich eine dringende Empfehlung ausgesprochen. Lesen Sie *Der Hund, der Eier legt* von H. Beck-Bornholt und H. Dubben (Reinbeck bei Hamburg, 1997). Sie werden sowohl bei der Lektüre glänzend unterhalten als auch nach der Lektüre mit ganz anderer Sensibilität für Statistik durch die Welt gehen!

> zur außerschulischen Realität angesehen wird. [...] Die Unvereinbarkeit bestimmter Lösungen mit der Realität oder inneren Bedingungen einer Aufgabe wird von sehr vielen Grundschülern nicht empfunden. Bei älteren Schülern hat sich um so mehr ein Bild von Mathematik verfestigt, wonach alles lösbar ist nach bestimmten Regeln oder Algorithmen.

Eine Extrapolation auf die Hauptschule bis hin zum Gymnasium scheint dem Autor dieses Beitrags durchaus legal.

2.6 Eigene Wege zum Dividieren

Unter dieser harmlosen Überschrift eines Beitrags von A. Fromm und H.Spiegel in Band 23 der Schriftenreihe Didaktik der Mathematik (*Trends und Perspektiven*, bei Hölder, Pichler, Tempsky, Wien, 1996) wird anhand eines ausführlich kommentierten Interviewausschnittes einer Grundschülerin vorgeführt,

> „wieviel richtiges Denken in einem auf den ersten [und auch zweiten und dritten (Anm. d. Verf.)] Blick chaotisch und undurchsichtig erscheinenden Verhalten entdeckt werden kann (wobei hier die Versprachlichung des Denkens das Hauptproblem ist), wie schwierig es sein kann, den Gedankengängen von Grundschulkindern zu folgen und welch hohes Maß an Konstruktivität in den Lösungswegen der Kinder steckt.“

2.7 Kognitive Strategien und mathematische Lernprozesse

Im gleichen Band der Schriftenreihe *Didaktik der Mathematik* beschreibt und analysiert K. Hasemann die sog. concept-maps zur Thematik elementarer Teilungs- und Bruchrechenoperationen, die von verschiedenen Schülern zusammengestellt wurden. Dazu hatten sie die Aufgabe erhalten, vorgegebene Begriffe wie *ein halb, Apfel, verteilen, Rechteck, Zahl, Nenner, Bruch, rechnen, ...* nach Zusammengehörigkeit zu ordnen und mit Oberbegriffen zu versehen. Mit diesem Hilfsmittel lassen sich Denkvorgänge erklären, die ihren Ursprung in der Art haben, wie Wissen im Gehirn verknüpft wurde.

2.8 Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff

Ebenfalls in Band 23 der Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik stellt V. Kokol-Voljć die Ergebnisse einer in Slowenien durchgeführten Untersuchung vor, bei der 24 fünfzehnjährigen SchülerInnen und 21 MathematiklehrerInnen jeweils ein Fragebogen zum Funktionsbegriff vorgelegt wurden. Die Auswertung deckt eine starke Diskrepanz auf zwischen der formalen Definition und den intuitiven Vorstellungen von einer Funktion, die bei Lehrern und Schülern an denselben Stellen zu Problemen in der korrekten Beantwortung geführt hat. Außer einigen verbreiteten Fehlvorstellungen über den Funktionsbegriff selbst werden auch Probleme bei der Versprachlichung von Mathematik diagnostiziert. Eine ähnliche Untersuchung dürfte wohl auch in Deutschland ähnliche Ergebnisse erbringen!

2.9 G. Malle: Didaktische Probleme der elementaren Algebra

Dieses 300 Seiten starke Buch (Vieweg, Braunschweig, 1993) wendet sich an Mathematiklehrer aller Schularten, Lehramtsstudenten und alle Personen, die am Problemkreis *Buchstabenrechnen* interessiert sind.
Es wird versucht – ausgehend von einer Analyse des Variablenbegriffs und der Verwendung von Variablen in verschiedenen Bereichen – den Stellenwert dieses Gebiets neu zu beleuchten. Dabei wird vor allem die traditionelle Gleichungslehre kritisch unter die Lupe genommen. Zahlreiche Fallstudien (Interviews mit Schülern) stellen die angestellten Überlegungen auf eine solide empirische Basis. Davon ausgehend werden detaillierte methodische Vorschläge zur Behandlung dieses Stoffgebiets im Unterricht entwickelt und anhand von konkreten Aufgaben illustriert (Kapitel 1-6, 10-12).
Besonderes Augenmerk wird der Erklärung von Schülerfehlern beim Umgang mit algebraischen Ausdrücken zugewandt. Dies geschieht schwerpunktmäßig in den Kapiteln 7-9, wo der Leser auf 55 Seiten umfassende Informationen zu diesem Problemkreis (sowie viele weitere Literaturhinweise) findet.

3 „Mathematische Feeler"

Eine umfangreiche Zusammenstellung von Antworten auf die oben (in 1) bereits erwähnte Frage nach Zahlen, die bei Einsetzen in eine derartige falsche Formel dennoch ein korrektes Ergebnis liefern, bietet Robert Carman in dem Aufsatz *Mathematical Misteaks"* (*Mathematics Teacher 64 (1971), S.109-115*). Zur Auflockerung hier einige der mathematisch interessantesten Beispiele:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

ist beispielsweise wahr für

$$\frac{1}{3}+\frac{-4}{6}=\frac{1-4}{3+6}$$

Da Brüche fast immer stören, mag es für viele eine große Erleichterung sein, zu erfahren, dass man sie getrost weglassen kann, beispielsweise hier:

$$(31+\frac{1}{2})\cdot(21-\frac{1}{3})=31\cdot 21 \quad \text{oder} \quad (7+\frac{3}{7})\cdot(4-\frac{3}{13})=7\cdot 4\,.$$

Solche Fälle lassen sich aus einem Zahlenpaar(-tripel) konstruieren, indem man jeweils durch einen Teiler der anderen Zahl dividiert: aus den Zahlen 24 und 25 gewinnt man

$$24:5=5-\frac{1}{5} \quad \text{und} \quad 25:4=6+\frac{1}{4}.$$

Auch das Kürzen von Brüchen lässt sich manchmal stark vereinfachen und völlig ohne Primfaktorzerlegung einfach durch Wegstreichen gemeinsamer Ziffern erledigen: Es ist

$$\frac{1\hat{6}}{\hat{6}4}=\frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{2\hat{6}}{\hat{6}5}=\frac{2}{5}.$$

Besonders schön ist hier

$$\frac{2\hat{6}\hat{6}\hat{6}\hat{6}}{\hat{6}\hat{6}\hat{6}\hat{6}5}=\frac{2}{5}$$

Exponenten verlieren ebenfalls viel von ihrem Schrecken, wenn man sich an Beispiele hält, bei denen man auch auf sie verzichten (bzw. sie sogar aus einer Summe kürzen) kann. Es ist

$$\frac{3^4+25^4+38^4}{7^4+20^4+39^4}=\frac{3+25+38}{7+20+39} \quad \text{oder} \quad \frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}$$

oder schrittweise

$$\frac{2^3+3^3+10^3+11^3}{1^3+5^3+8^3+12^3}=\frac{2^2+3^2+10^2+11^2}{1^2+5^2+8^2+12^2}=\frac{2+3+10+11}{1+5+8+12}.$$

Eine anregende Übungsaufgabe für Fortgeschrittene auf dem Gebiet der Potenzgesetze ist es, folgende Regel auf Korrektheit zu überprüfen: Wenn in einer Summe Basis und Exponent gleich sind, dann kann man den Exponenten und die Pluszeichen weglassen. Ein Beispiel ist hier $3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5 = 3435$.

Dass es auch im Umgang mit den Winkelfunktionen und dem Logarithmus viele überraschende Vereinfachungen gibt, mag der Leser bereits befürchten. Oder wussten Sie schon, dass man in der Formel

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cdot \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

gelegentlich auf den Cosinus verzichten kann?

Kürzt man im konkreten Zahlenbeispiel $\cos 4 + \cos 2 = 2 \cdot \cos 3 \cdot \cos 1$ sämtliche Cosinusse heraus, so bleibt die ebenfalls wahre Aussage $4 + 2 = 2 \cdot 3 \cdot 1$.

Derjenige, dem es gelingt, diese und die vielen anderen Sonderfälle bei Carman zu analysieren, das Bildungsgesetz zu entdecken, und zu ermitteln, welche Eigenschaften die Zahlen in den konkreten Beispielen haben, der hat neben einiger Rechentechnik auch sein Verständnis der zugrunde liegenden Mathematik gestärkt. Hier muss man nicht unbedingt warten, bis ein Schüler einen geeigneten Fehler begeht, sondern man kann derartige Beispiele auch ohne äußeren Anlass an verschiedenen Stellen einsetzen.

In ihrem Aufsatz *Mistakes in Mathematics* in *Math. Teaching 85; 12/1978, p.38f.* gibt Kath Hart vorwiegend statistisches Material von 10000 englischen Schülern zur Häufigkeit von Fehlern bei gleichen Aufgaben in verschiedenen Altersstufen (11- bis 15jährige), wobei auch hier das Bruchrechnen eine bedeutende Rolle spielt - ein Beispiel:

Die Addition in der Form $\frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$ wurde hierbei im ersten Jahr von „nur“ 16%, im zweiten Jahr von 27, im dritten Jahr von 24 und im vierten Jahr von 21% durchgeführt. Die am wenigsten „Fortgeschrittenen“ waren also am besten!

4 Rechenstörungen und Rechenschwächen

Analog zur Legasthenie ist seit einigen Jahren der Begriff der Arithmasthenie bzw. der Dyskalkulie für besonders auffällige Formen der Rechenschwäche geprägt worden.

Die wohl umfassendste und seriöseste Information zu diesem Thema findet sich in einem Tagungsband, der von der Akademie für Lehrerfortbildung in Dillingen erstellt wurde und 1995 beim Auer-Verlag in Donauwörth erschienen ist (ISBN 3-403-2716-3). Ich zitiere hier die Einleitung dieses schwerpunktmäßig an den Jahrgangsstufen Eins bis Sechs und damit an den Bedürfnissen von Grund- und Hauptschullehrern orientierten Buches:

> Ausgehend von der Tatsache, dass Rechnenlernen für das Kind einen ganzheitlichen Prozess darstellt, an dem die kognitive, emotionale, psychomotorische und auch soziale Dimension beteiligt sind, zielt diese Fortbildungssequenz auf ein ganzheitliches Förderkonzept ab, das nicht jahrgangsstufenorientiert ist, sondern auf spezifische Förderschwerpunkte hin ausgerichtet ist. Dabei wird auch deutlich, dass es uns nicht um eine theoriegeleitete wissenschaftliche Erhellung des Phänomens Rechenstörungen gehen kann, sondern dass vielmehr das Bemühen im Vordergrund steht, direkt im Beratungs- bzw. Unterrichtsalltag Umsetzbares in puncto Förderung zu erarbeiten. [...] Somit ermöglicht dieses Konzept, unter (fast) allen Bedingungen des Systems (Person, Schule, Familie, ...) eine Förderung in Angriff zu nehmen und trägt der oft widrigen Unterrichtsrealität (große Klassen, keine Förderkurse, ...) Rechnung, wenngleich betont werden muss, dass optimale Rahmenbedingungen einen wesentlichen Anteil an der Effizienz von Förderung haben.
> Da Rechenstörungen bei jedem Betroffenen stets multikausal bedingt sind, wurde auf den Versuch einer Systematik von Erscheinung und möglicher Fördermaßnahmen verzichtet. Statt dessen finden Sie nach spezifischen Schwerpunkten ausgewählte exemplarische Fallbeschreibungen, anhand derer Sie ganz speziell auf Ihre(n) Schüler(in) abgestimmte Förderpläne erstellen können. Entsprechend dazu können Sie aus der detailliert beschriebenen und abgelichteten Materialsammlung eine individuelle Auswahl treffen oder aber Möglichkeiten ableiten, selbst passende Arbeitsmittel zu erstellen.

Dass wir von der Lektüre von *Mathematik mangelhaft* von Rolf Röhrig abraten, ist jedem Leser der Literaturhinweise (zu finden unter „Links“) auf der BLK-Homepage der Uni Bayreuth (http://blk.mat.uni-bayreuth.de) bereits bekannt.

5 Abschließende Übung für den Leser

Quelle für den nachfolgend geschilderten Fall „Margaret“ ist der Aufsatz *The dynamics of put* von David Kent in *Mathematical Teaching 82, März 1978, p.32f.*, auf den auch in der Zeitschrift *Mathematiklehrer 1, 1980* auf S.2 Bezug genommen wird. In der sehr empfehlenswerten Originalarbeit finden sich noch fünf weitere Fälle, bei denen aus Schülerfehlern aus verschiedenen Altersstufen und Sachgebieten jeweils eine in sich logische – nur leider falsche – Denkstruktur analysiert wird. Besonders erschreckend ist hier etwa der Fall „Robin“, dessen Umformung $\frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h^2$ keineswegs mit dem simplen Hinweis „Differenzen und Summen kürzen nur die ...“ abgetan werden konnte, sondern sehr viel tiefer liegende Verständnisschwierigkeiten bezüglich Operand und Operator zur Ursache hatte. Aber zurück zu Margaret, die lineare Gleichungen bearbeitet hatte:

Aufgabe	Margarets Antwort
$x + 3 = 11$	$x = 8$
$3x - 7 = 5$	Das kann ich nicht!
$\frac{3x}{4} - 6 = 2$	x=2
$x + 3 = 15$	Quatsch!

Welcher Denkfehler liegt diesem Ansatz zugrunde?

Die Lösung finden Sie entweder in der angegebenen Literatur oder in der jeweils aktualisierten Version auf dem BLK-Server der Universität Bayreuth.