Aufgabenkultur und Unterrichtsentwicklung

Geplanter Ablauf des Workshops

Vorschlag für eine Aufgabenwerkstatt (Input)

Kaffeepause

Arbeiten in der Aufgabenwerkstatt (Gruppen):

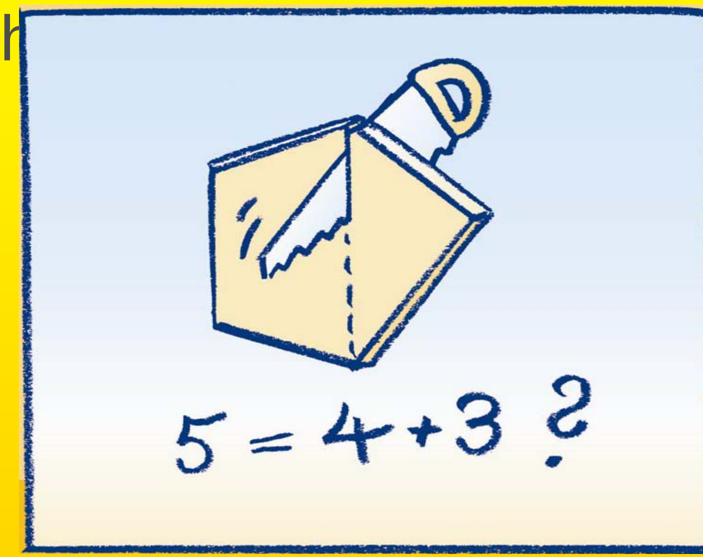
- Entwicklung von Aufgaben
- Bearbeitung der Aufgaben
- Präsentation und Diskussion

Andreas Büchter, Dortmund

3. Zentrale Fortbildungstagung SINUS-Transfer, Soltau,

Aufgabenkultur und Unterrichtsentwicklung

Vorsch erkstatt



Andreas Büchter, Dortmund

3. Zentrale Fortbildungstagung SINUS-Transfer, Soltau,

Meine Aufgabe im Folgenden ...

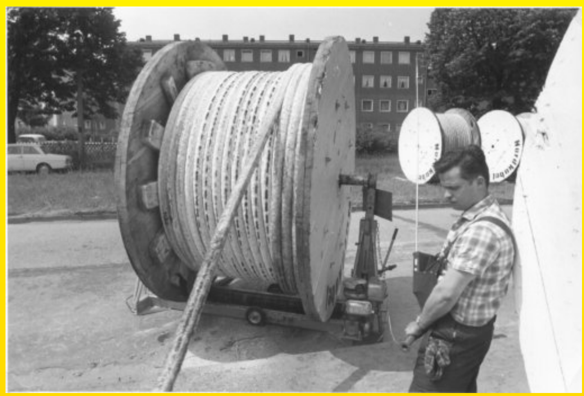
Ich werde vortragen über ...

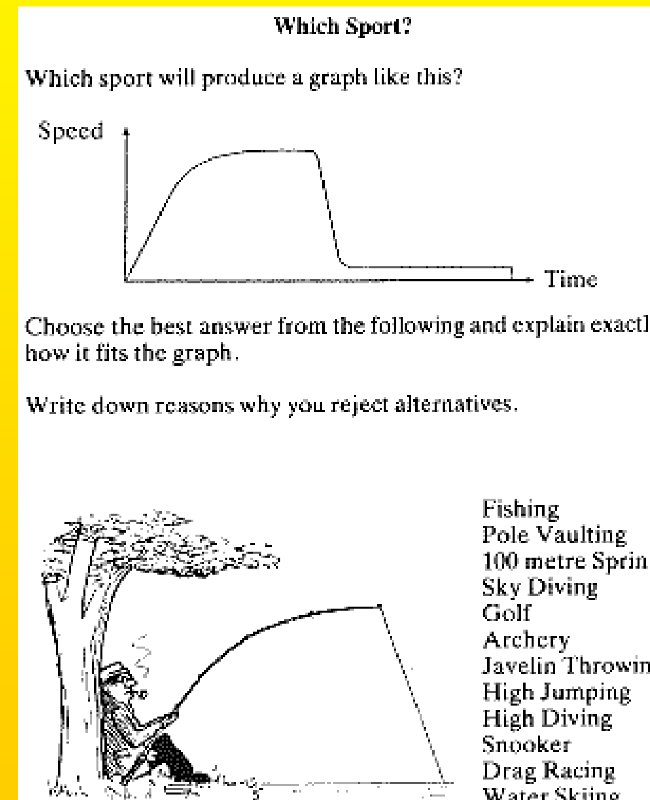
- die Frage nach „der guten Aufgabe“,
- Aufgaben zwischen Lernen und Leisten,
- einen Vorschlag für ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben sowie
- eine Auffassung von Aufgabenentwicklung als Handwerk und dazugehörige Techniken und Instrumente
(→ Konzept für Fortbildungen, Workshops etc.).

Was ist eine gute Aufgabe?

Bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x = 4$$





Which Sport?

Which sport will produce a graph like this?

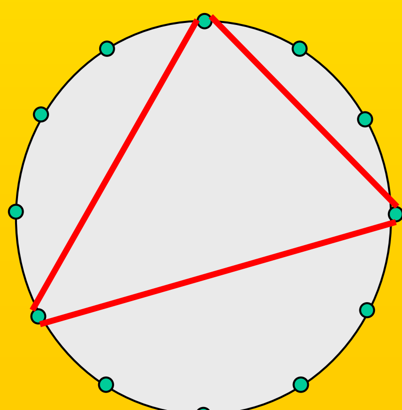
Speed

Time

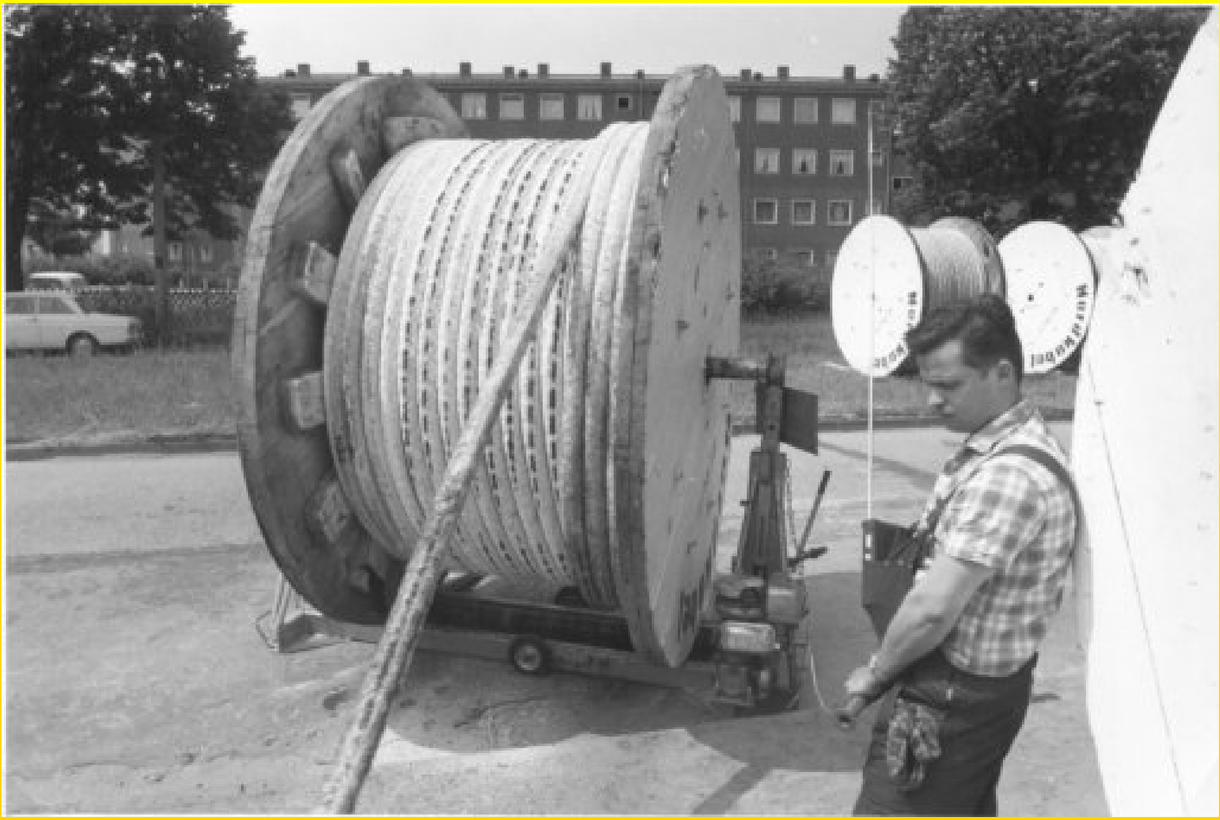
Choose the best answer from the following and explain exactly how it fits the graph.

Write down reasons why you reject alternatives.

Fishing
Pole Vaulting
100 metre Sprint
Sky Diving
Golf
Archery
Javelin Throwing
High Jumping
High Diving
Snooker
Drag Racing
Water Skiing



Ist das eine gute Aufgabe?



„Wie lang ist das Kabel auf der Trommel?“
(vgl. Förster/Herget 2002)

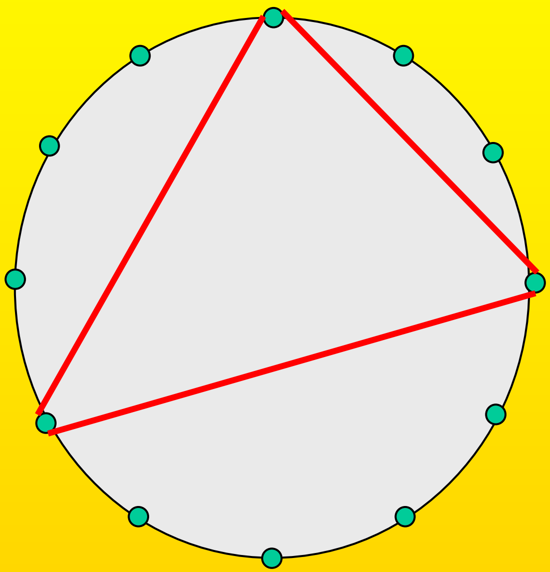
Oder das?

Spanne das Gummiband so, dass möglichst viele verschiedene Dreiecke entstehen.

Sammle die Dreiecke, untersuche ihre Winkel und sortiere sie nach Gruppen.

Stelle möglichst viele Vermutungen auf.

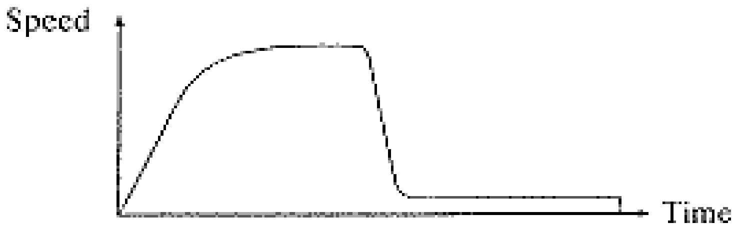
Überprüfe und begründe sie, wenn möglich.



Oder vielleicht diese?

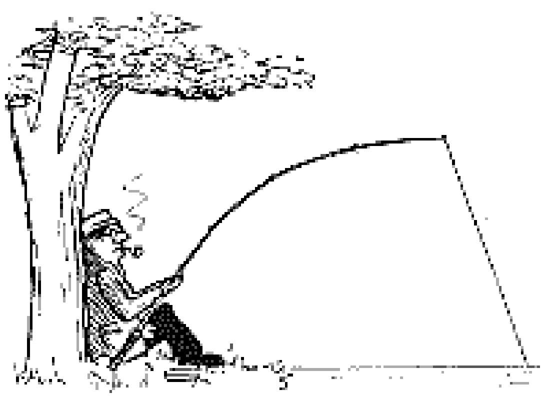
Which Sport?

Which sport will produce a graph like this?



Choose the best answer from the following and explain exactly how it fits the graph.

Write down reasons why you reject alternatives.



Fishing
Pole Vaulting
100 metre Sprint
Sky Diving
Golf
Archery
Javelin Throwing
High Jumping
High Diving
Snooker
Drag Racing
Water Skiing

www.mathshell.com/scp/lfg50.htm

Und was ist mit dieser, ist diese gut?

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x = 4$

Das kommt darauf an ...!

Entdeckendes Lernen

Diagnose

Zentrale Vergleichsarbeit / Leistungstest

Selbsteinschätzung

Klassenarbeit

usw. ...

Entdeckendes Lernen

Diagnose

Zentrale Vergleichsarbeit / Leistungstest

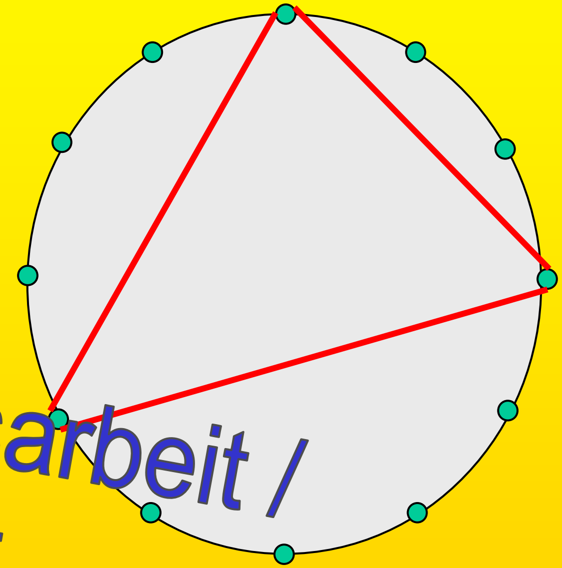
„Wie lang ist das Kabel?“ (vgl. Förster/Herget 2002)

Spanne das Gummiband so, dass möglichst viele verschiedene Dreiecke entstehen.

Sammle die Dreiecke, untersuche ihre Winkel und sortiere sie nach Gruppen.

Stelle möglichst viele Vermutungen auf.

Überprüfe und begründe sie, wenn möglich.



Entdeckendes Lernen

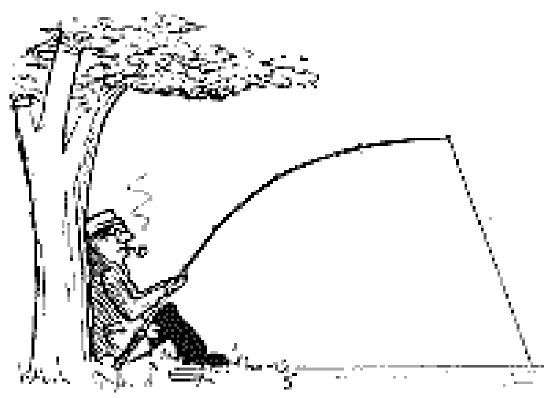
Zentrale Vergleichsarbeit / Leistungstest

Which Sport?

Which sport will produce a graph like this?

Choose the best answer from the following and explain exactly how it fits the graph.

Write down reasons why you reject alternatives.



- Fishing
- Pole Vaulting
- 100 metre Sprint
- Sky Diving
- Golf
- Archery
- Javelin Throwing
- High Jumping
- High Diving
- Snooker
- Drag Racing
- Water Skiing

Entdeckendes Lernen

Zentrale Vergleichsarbeit / Leistungstest

Diagnose

www.mathshell.com/scp/lfg50.htm

Entdeckendes Lernen

Diagnose

Zentrale Vergleichsarbeit /
Leistungstest

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $x^2 + 3 \cdot x = 4$

Es stellt sich also die Frage ...

... wofür eine Aufgabe gut sein soll!

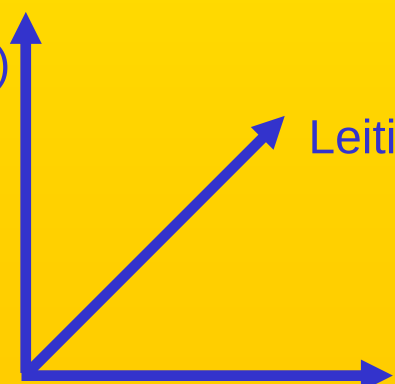
- Welcher Zweck wird mir ihr verfolgt?
- Wem wird die Aufgabe vorgelegt?
- Wie ist sie in die Lerngeschichte eingebettet?
- Wer wertet die Ergebnisse aus?
- ...

Aufgaben in Zeiten der „Outputorientierung“

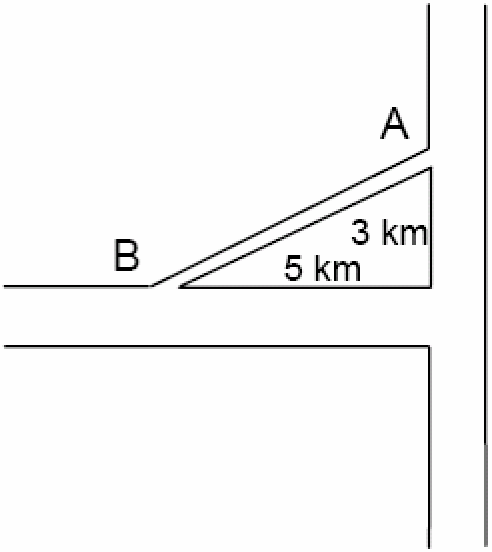
- Bildungsstandards & Kernlehrpläne: Aufgaben illustrieren Anforderungen („Kompetenzerwartungen“).
- Leistungstests & Vergleichsarbeiten: Aufgaben machen (Teilaspekte von) Leistung messbar.
- Ergebnisorientierte Unterrichtsentwicklung: Aufgaben sind Teil der Rückmeldung von Schülerleistungen an Lehrerinnen und Lehrer.

Aufgaben illustrieren Anforderungen

„Die Aufgabenbeispiele im Kapitel 4 verdeutlichen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit ihren Anforderungsbereichen und die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen über die Angabe von Leitideen. Zugleich illustrieren die Aufgabenbeispiele exemplarisch die Standarderreichung, indem sie zeigen, welche konkrete Qualität an mathematischer Leistung jeweils erbracht werden muss, um die Standards zu erfüllen. Sie sind daher auch zur Adaption und schöpferischen Diskussion für Lehrkräfte und Fachkollegien gedacht.“ (Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss, KMK 2003)



(1) Lohnt sich die Abkürzung?



Aufgabenstellung

Viele Autofahrer benutzen für die Fahrt von A nach B nicht die stark befahrenen Hauptstraßen, sondern einen „Schleichweg".

Äußern Sie sich, ob die Abkürzung eine Zeitersparnis bringt, wenn man auf dem „Schleichweg" durchschnittlich mit 30 km/h und auf den Hauptstraßen durchschnittlich mit 50 km/h fahren kann.

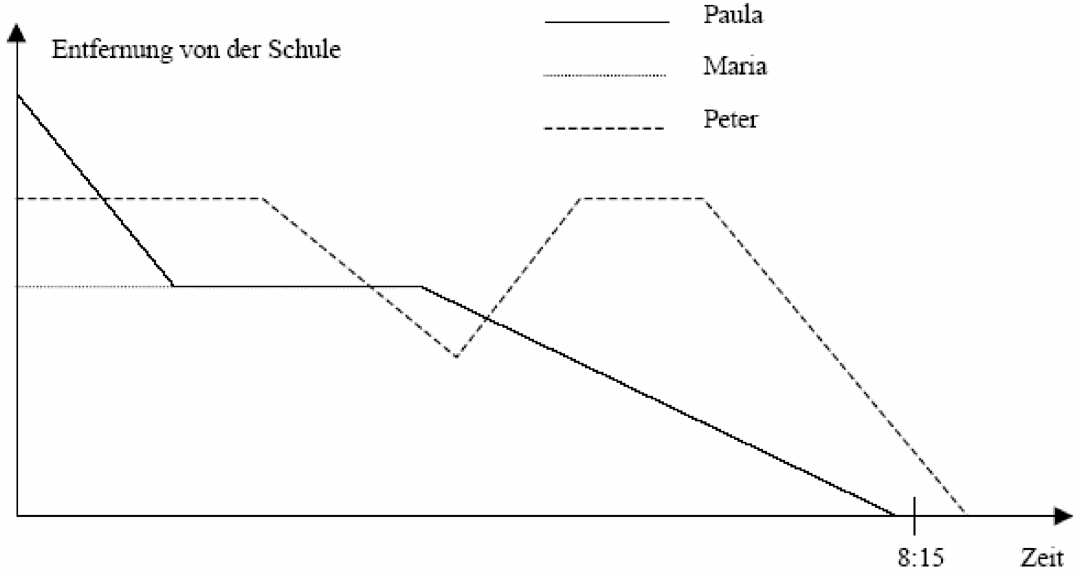
Aufgaben machen Leistung messbar

„Die Kompetenzen werden so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mit Hilfe von Testverfahren erfasst werden können. Der Darstellung von Kompetenzen, die innerhalb eines Lernbereiches oder Faches aufgebaut werden, ihrer Teildimensionen und Niveaustufen, kommt in diesem Konzept ein entscheidender Platz zu.“

(Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards , Klieme u. a. 2003)

Schulweg

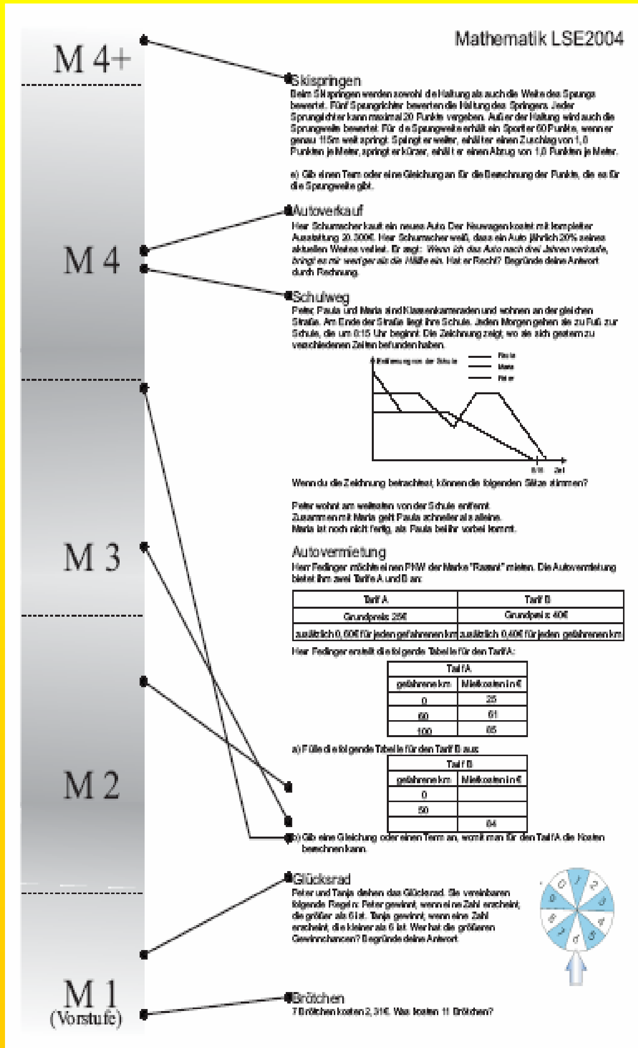
Peter, Paula und Maria sind Klassenkameraden und wohnen an der gleichen Straße. Am Ende der Straße liegt ihre Schule. Jeden Morgen gehen sie zu Fuß zur Schule, die um 8:15 Uhr beginnt. Die Zeichnung zeigt, wo sie sich gestern zu verschiedenen Zeiten befunden haben.

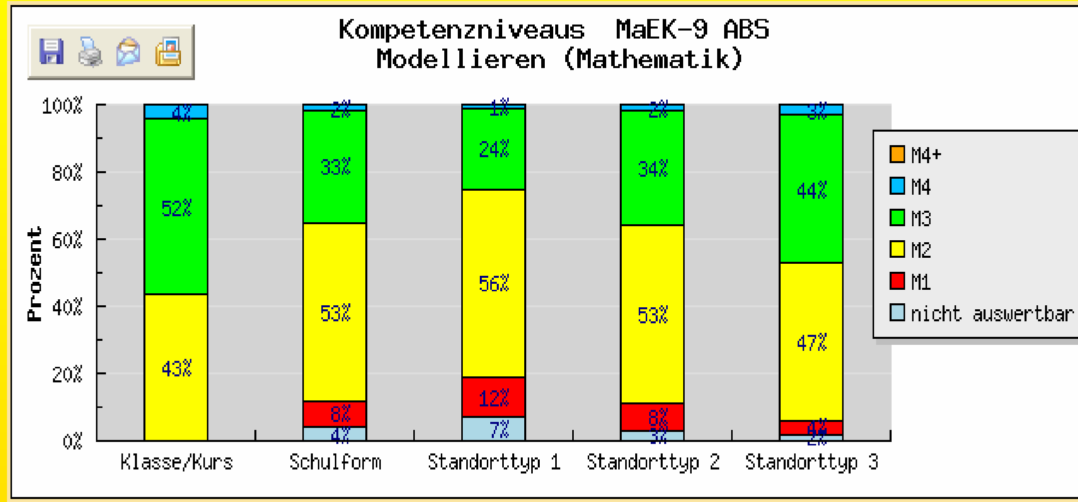


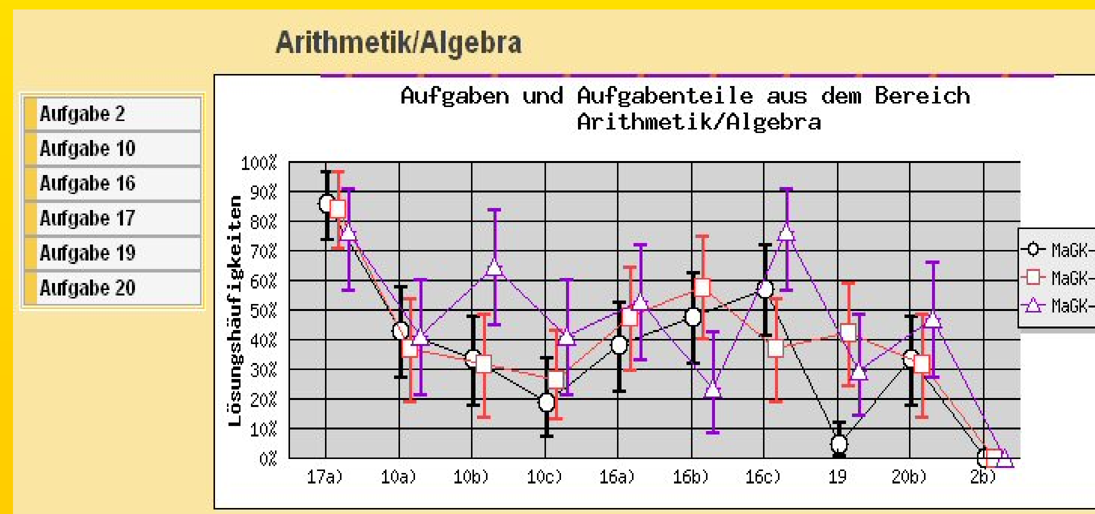
Wenn du die Zeichnung betrachtest, können die folgenden Sätze stimmen?

	ja	nein
Peter wohnt am weitesten von der Schule entfernt.	❐	❐
Zusammen mit Maria geht Paula schneller als alleine.	❐	❐
Maria ist noch nicht fertig, als Paula bei ihr vorbei kommt.	❐	❐

Aufgaben sind Teil von Rückmeldungen







Aufgaben in der aktuellen Diskussion ...

... sind vor allem Aufgaben zum Leisten!

Aufgaben für das Leisten	**Aufgaben für das Lernen**
Leistungserwartung, Leistungserleben	
Fehler vermeiden	
Äußerer Anlass	
Einzelleistung & Bewertbarkeit	
Produktorientiert	
„Wichtig ist, was Schüler aus ihren Kompetenzen machen.“	

Aufgaben für den Unterricht ...

... sind zuallererst Aufgaben zum Lernen!

Aufgaben zum Erkunden, Entdecken, Erfinden

- Aufgaben zum Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen

Aber woher nehmen ...?

Warum versuchen wir es nicht mit Aufgaben des Leistungstyps?

So einfach geht das nicht ...

Was kennzeichnet Lernen*?

Lernen

- ist an Erfahrungen gebunden,
- findet in herausfordernden, aber zugänglichen Situationen statt,
- hat Schüleraktivität zur Voraussetzung,
- ist individuell verschieden und
- findet im sozialen Austausch statt

→„reichhaltige Lernumgebungen“

(auch in Zeiten von Standardsetzung und -überprüfung)

* Kompetenzerwerb

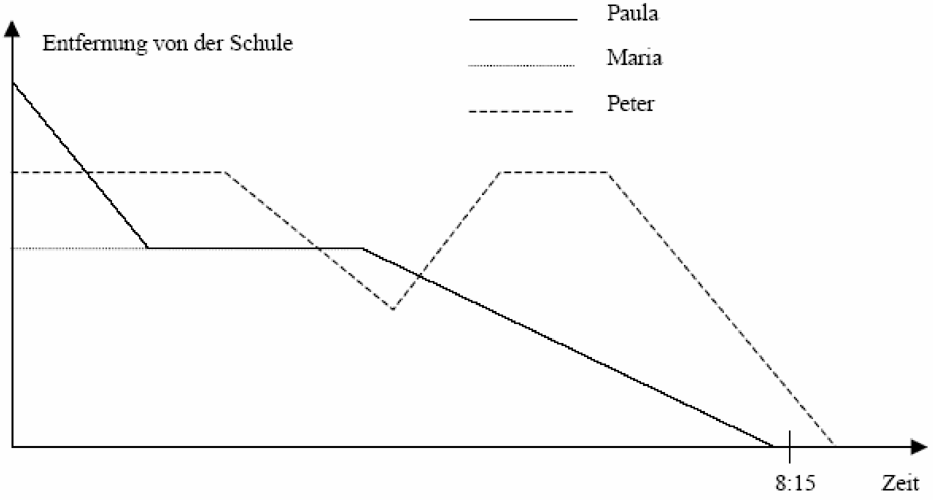
Vom Leisten zum Lernen

„Wie mache ich den Gegenstand, der als Antwort auf eine Frage zustande kam, wieder zur Frage? Und umgekehrt: Wie erhalte ich das ursprüngliche Fragen des Kindes? […] Alle methodische Kunst liegt darin beschlossen, tote Sachverhalte in lebendige Handlungen rückzuverwandeln, aus denen sie entsprungen sind ….“ (Heinrich Roth 1957)

Funktionale Zusammenhänge & Grafische Darstellungen

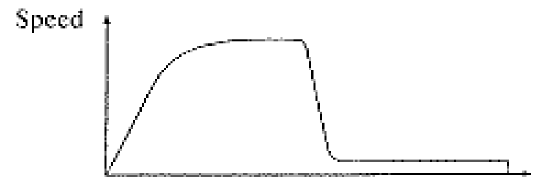
Schulweg

Peter, Paula und Maria sind Klassenkameraden und wohnen an der gleichen Straße. Am Ende der Straße liegt ihre Schule. Jeden Morgen gehen sie zu Fuß zur Schule, die um 8:15 Uhr beginnt. Die Zeichnung zeigt, wo sie sich gestern zu verschiedenen Zeiten befunden haben.



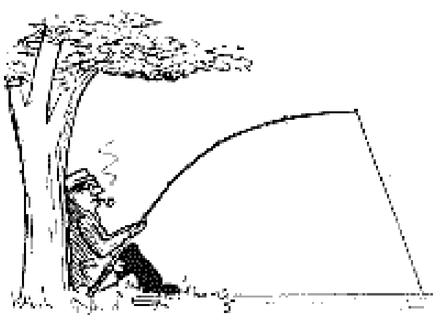
Which Sport?

Which sport will produce a graph like this?



Choose the best answer from the following and explain exactly how it fits the graph.

Write down reasons why you reject alternatives.



Fishing
Pole Vaulting
100 metre Sprint
Sky Diving
Golf
Archery
Javelin Throwing
High Jumping
High Diving
Snooker
Drag Racing
Water Skiing

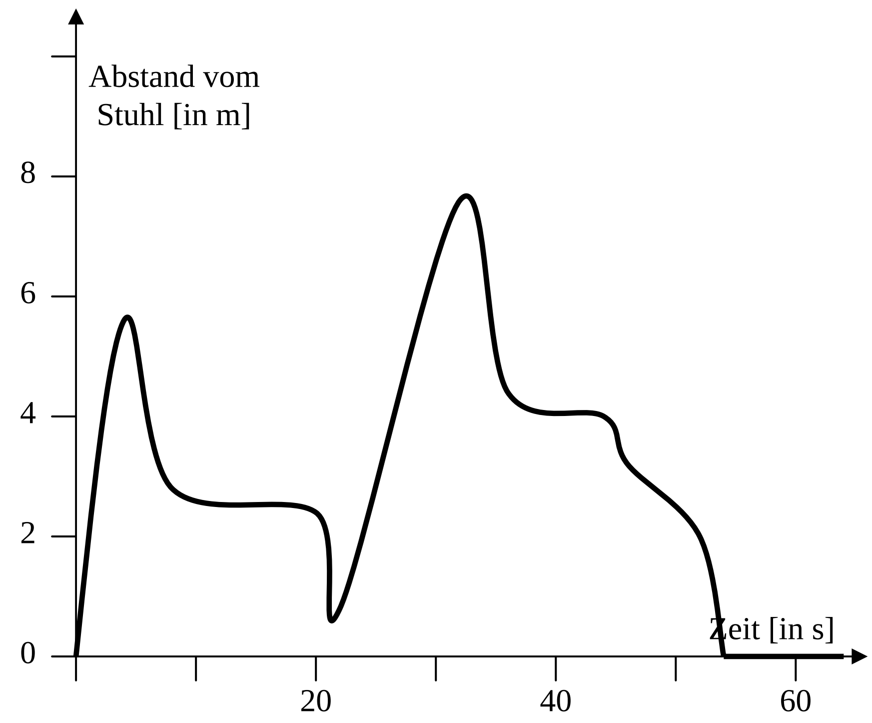
Funktionale Zusammenhänge & Grafische Darstellungen

Peter sitzt auf einem Stuhl, steht auf, geht im Raum umher und setzt sich wieder auf seinen Stuhl.

Die Abbildung zeigt, welchen Abstand zum Stuhl Peter nach 10, 20, 30 usw. Sekunden hat.

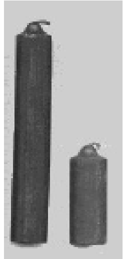
Versuche eine „Choreografie“ zu finden, die Peters Weg im Raum entsprechen könnte, studiere sie ein und präsentiere sie einem Mitschüler.

Dein Mitschüler soll dann eine Abstand/Zeit-Abbildung von deinem Weg zeichnen. Vergleicht diese hinterher gemeinsam mit Peters Abbildung.



Funktionale Zusammenhänge & Modellieren

Kerzen



Zwei Kerzen werden zur gleichen Zeit angezündet.

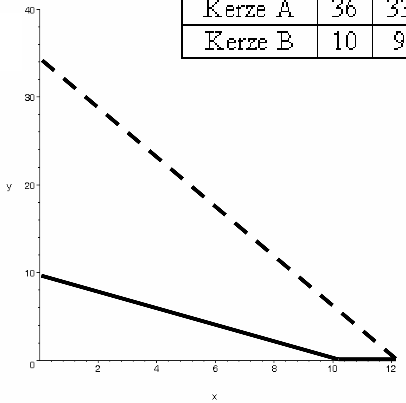
Eine der Kerzen ist 10 cm lang und wird in jeder Stunde 1 cm kürzer.

Die andere Kerze ist zu Anfang 36 cm lang. Sie brennt in jeder Stunde um 3 cm herunter.

Zu welchem Zeitpunkt sind die Kerzen gleich lang?

Rechnung:

Zeit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kerze A	36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
Kerze B	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

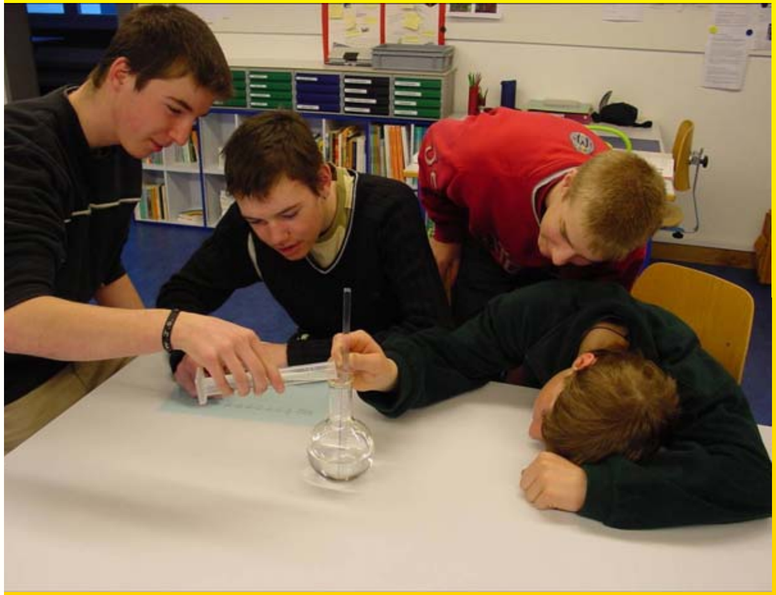


$$36 - 3 \cdot x = 10 - x$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = 13$$

Ergebnis:

Funktionale Zusammenhänge & Modellieren



W. Affolter, PM 2/2005

Funktionale Zusammenhänge & Modellieren

Beschreibe das Abbrennen einer Kerze auf mathematische Weise. Entwickle ein Verfahren, mit dem man bei verschiedenen Kerzen feststellen kann, nach welcher gemeinsamen Brenndauer zwei verschiedene Kerzen auf die gleiche Höhe heruntergebrannt sind.

Gute Aufgaben zum Lernen sind notwendig offen!

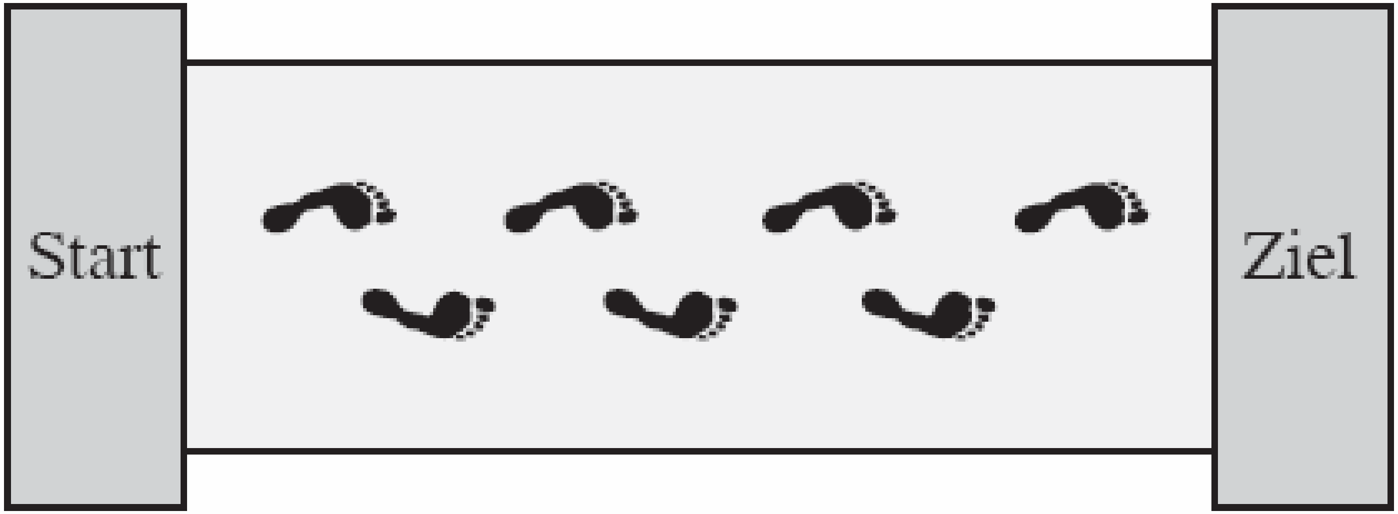
Kategorisierung von Aufgaben nach ihrer Offenheit

Start Situation, Information	**Weg** Methode, Verfahren	**Ziel** Ergebnis, Lösung	**Aufgabentyp**
×	×	×	*Beispielaufgabe*
×	×	–	*geschlossene Aufgabe*
×	–	×	***Begründungsaufgabe***
×	–	–	***Problemaufgabe***
–	–	–	***offene Situation***
–	×	×	*Umkehraufgabe*
–		×	*Problemumkehr*
–	×	–	*Anwendungssuche*

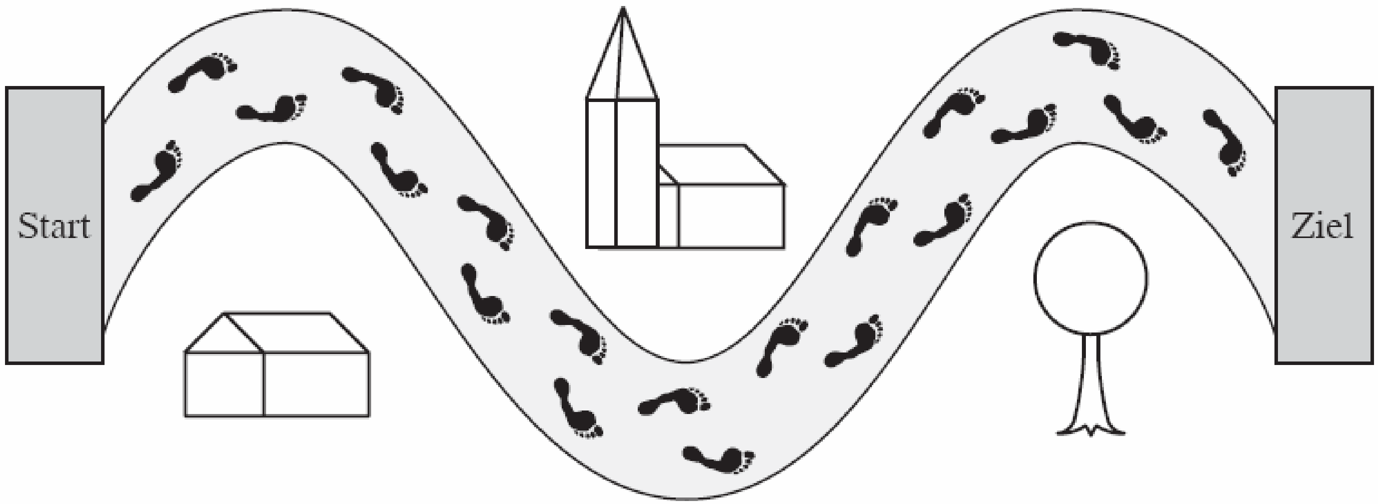
authentische Aufgabe

offene Aufgaben

vgl. Bruder (2000)

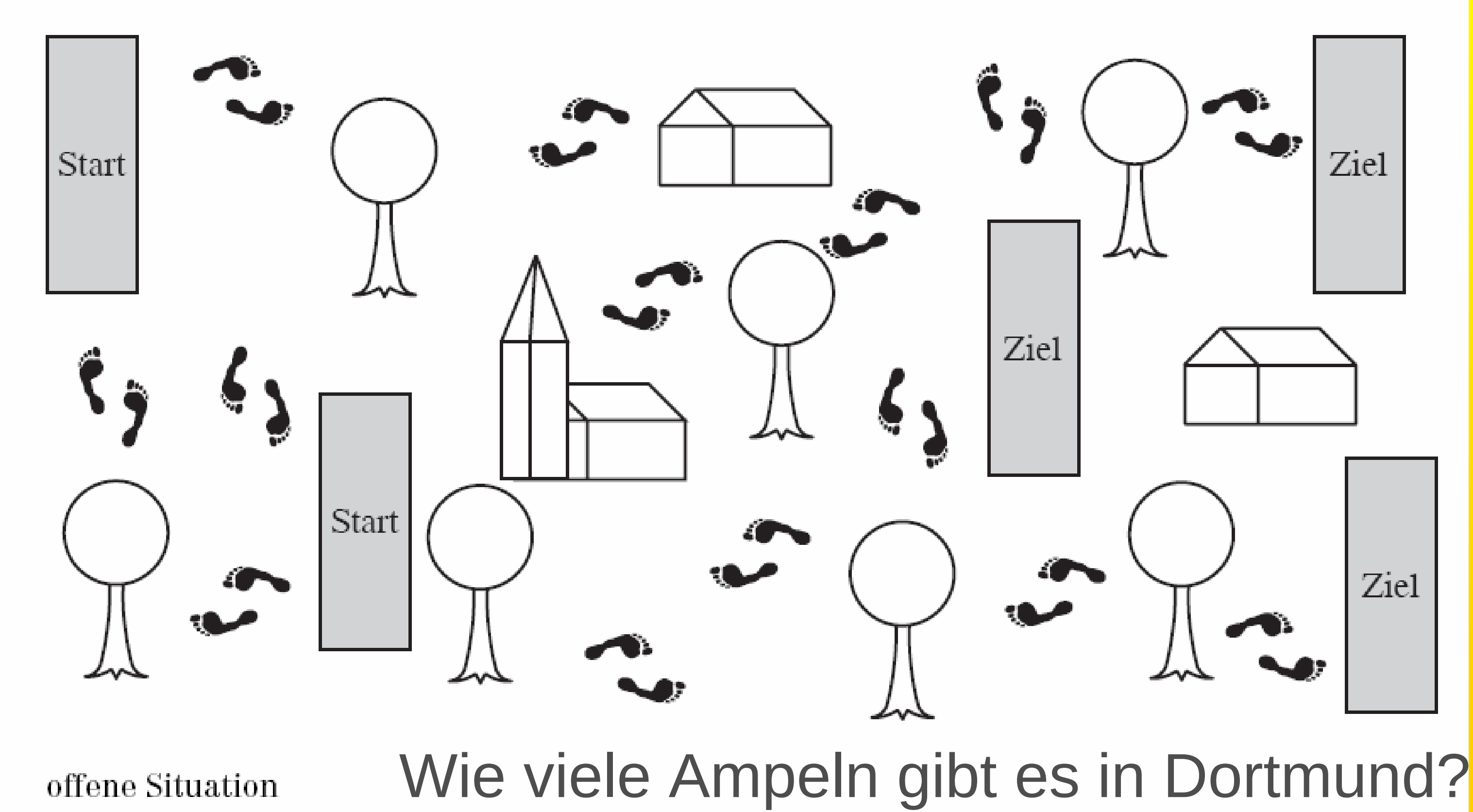


geschlossene Aufgabe $x^2 + 2 \cdot x - 2 = 0$



mehrschrittige geschlossene Aufgabe

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x = 4$$



Wie viele Ampeln gibt es in Dortmund?

Aber ist Offenheit auch hinreichend für gute Aufgaben zum Lernen?

Mathematik Lernen ...

... heißt immer auch Mathematik authentisch Betreiben!

- Dabei steht nicht die Kontextauthentizität im Vordergrund, sondern dass Schülerinnen und Schüler mathematische Fähigkeiten und Begriffe an vorstellbaren Problemen anwenden und weiterentwickeln können.
- Das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler unterscheidet sich nach dieser Auffassung graduell, nicht aber prinzipiell

Authentizität

„Mathematikaufgaben sind authentisch, wenn sie Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Tätigkeiten anregen, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind.“

(Büchter/Leuders 2005 – vgl. „Realistic Mathematics Education“)

Auf die Prozesse kommt es an!

Zwischenfazit: Aufgabe ≠ Aufgabe

Die bisher vorgestellten Aufgaben waren u. a. gekennzeichnet durch

- ihren Kontext (falls vorhanden),
- ihren fachlichen Gehalt und
- ihre kognitive Anforderung.

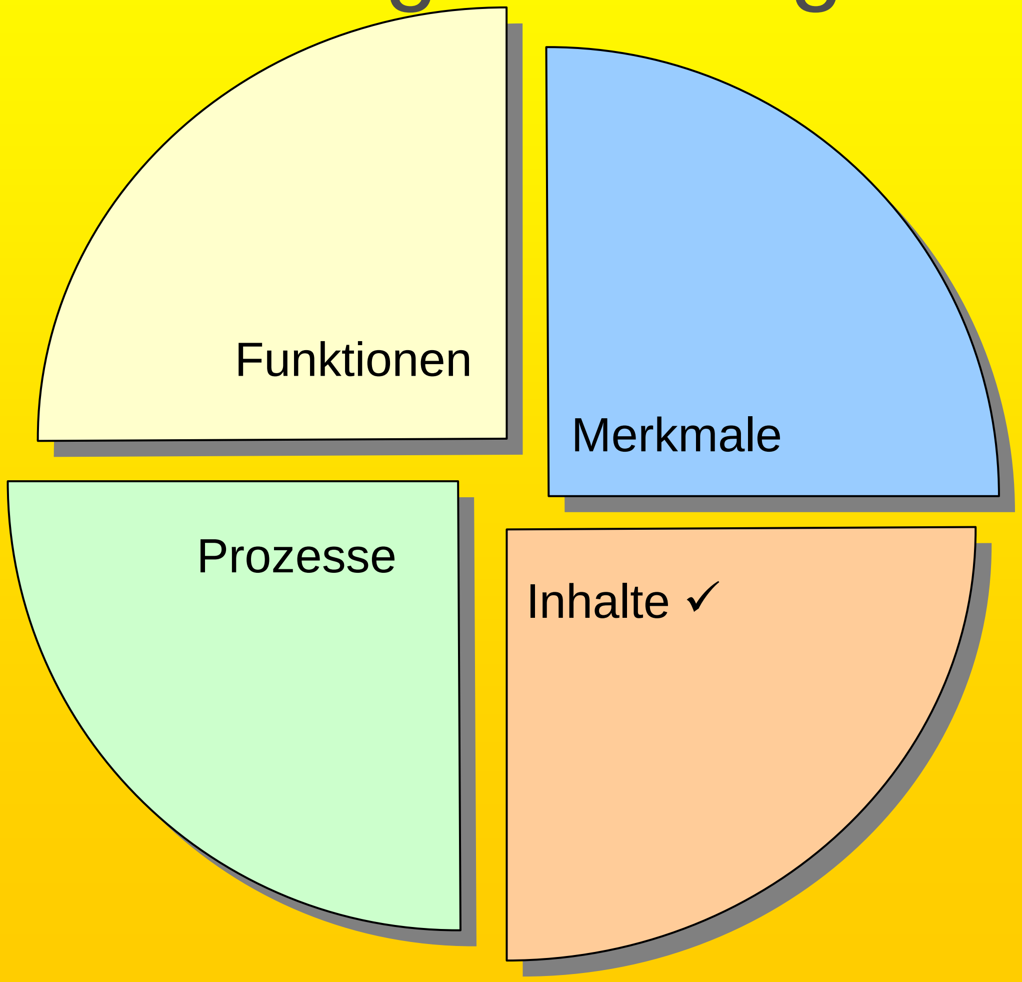
Diese Aspekte reichen aber offensichtlich noch nicht aus, um eine Aufgabe zu charakterisieren.

Auf der Suche nach einem Modell für den Umgang mit Aufgaben

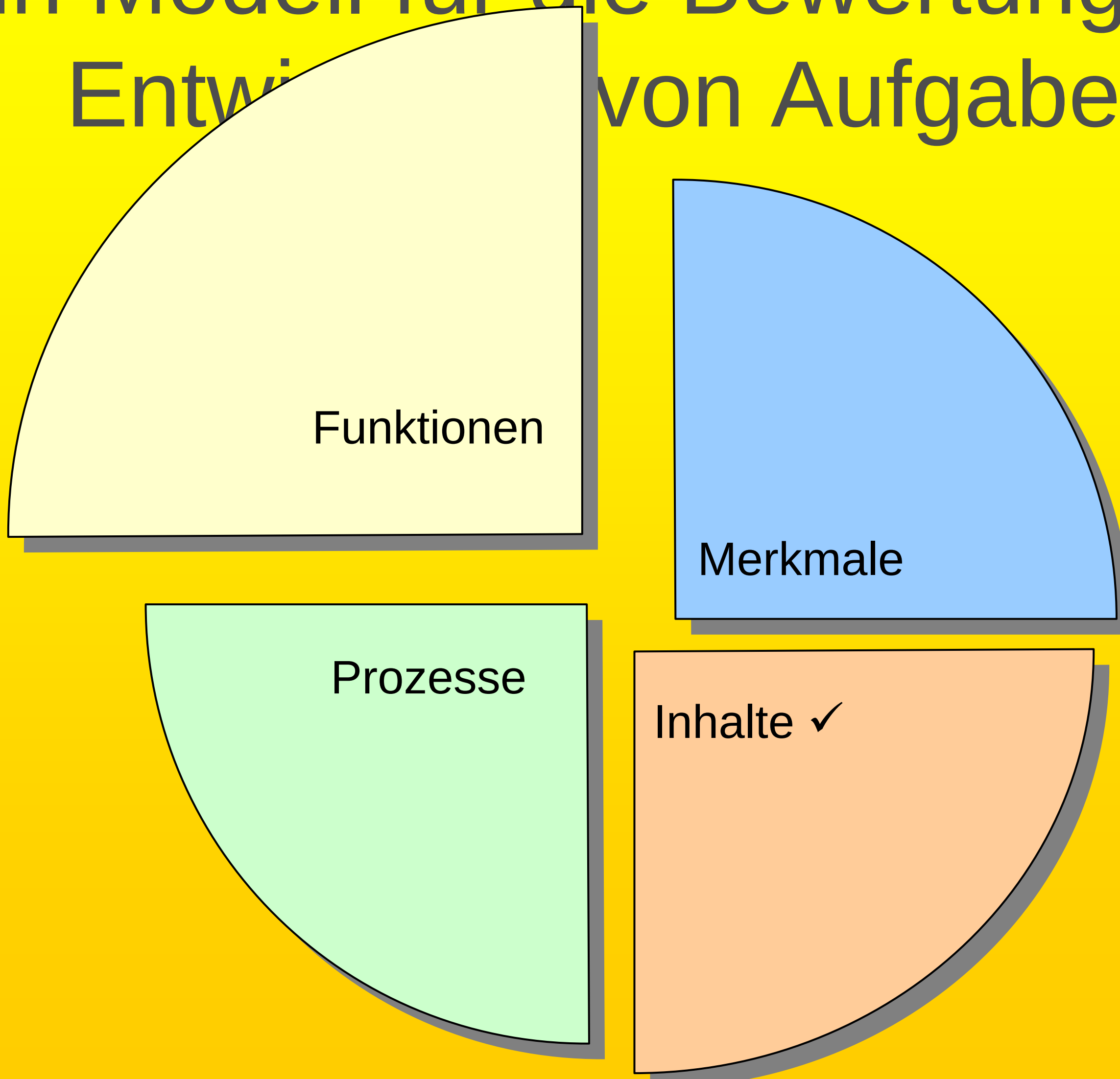
- in der Lehrerausbildung,
- in der täglichen Unterrichtspraxis und
- in der Lehrerfortbildung.

Kernfragen:
- Welche Begriffe und Interpretationen sind für die Praxis hilfreich?
- Wie können Bewertungsschemata und Konstruktionshilfen aussehen?

Ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben



Ein Modell für die Bewertung und Entw von Aufgaben



Funktionen von Aufgaben

Aufgaben zum Lernen

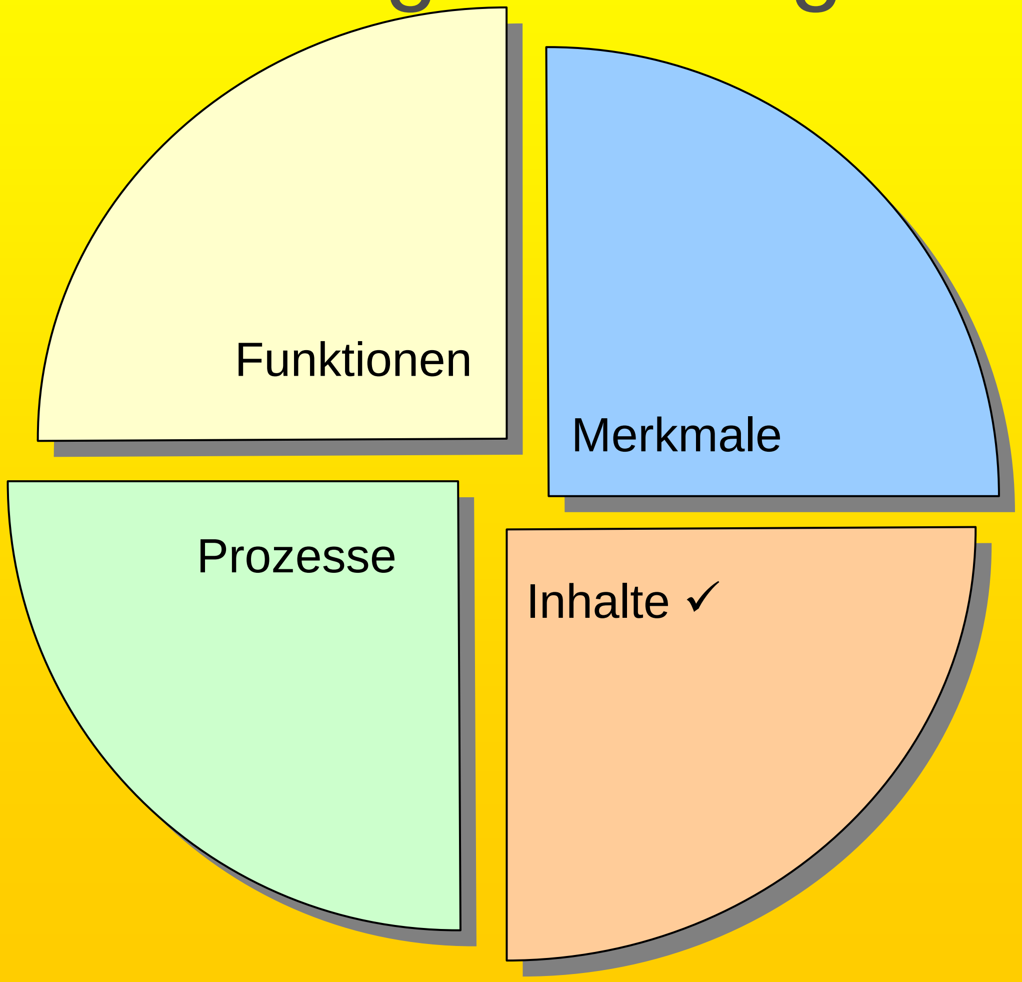
- Aufgaben zum Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Aufgaben zum Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Aufgaben zum Üben und Wiederholen

Aufgaben zum Leisten

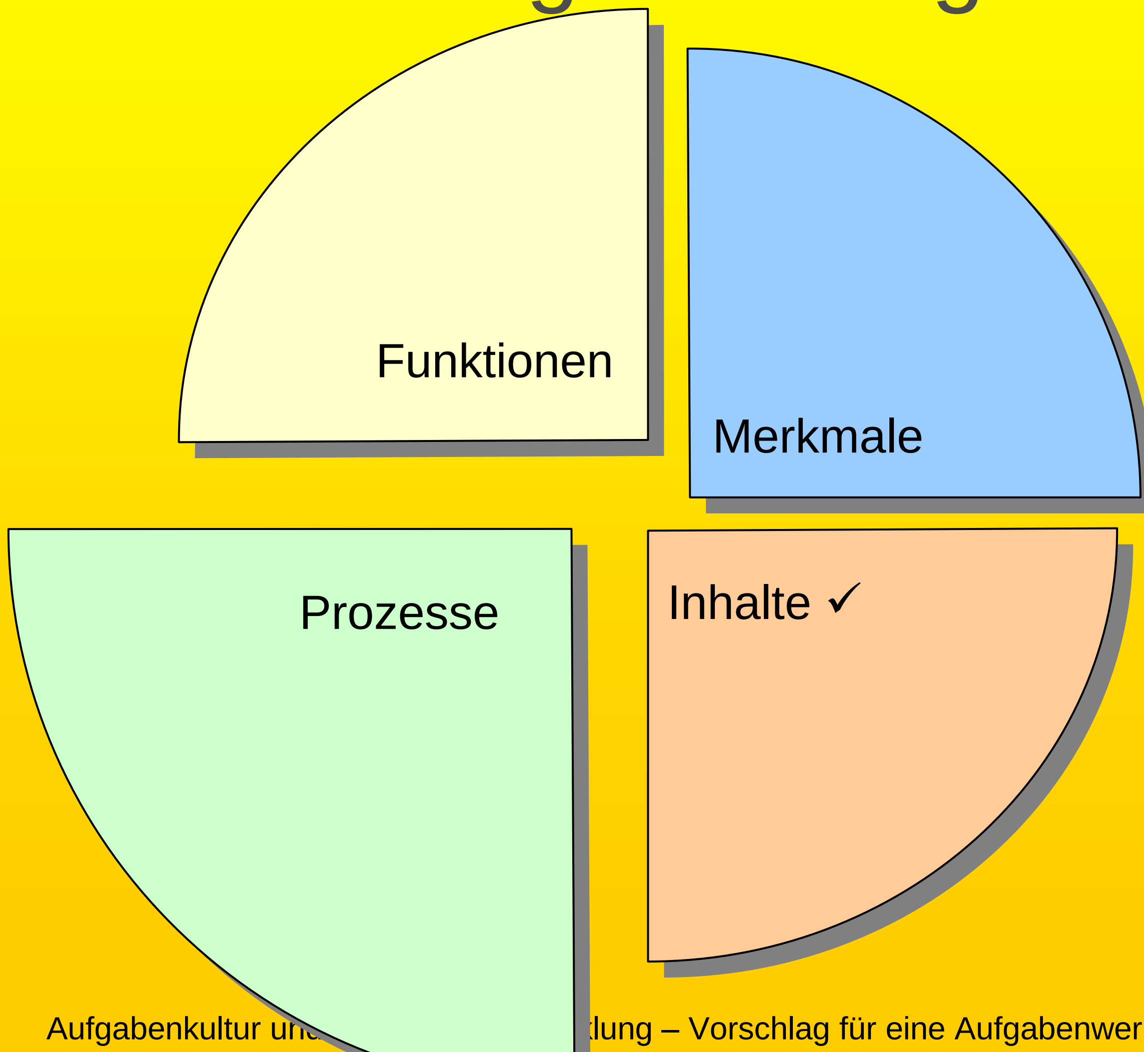
- Aufgaben zum Anwenden (Kompetenzerleben)
- Aufgaben zum (Selbst)überprüfen
- Aufgaben zur Diagnose
- Aufgaben zur Leistungsbewertung

Aufgaben für das Leisten	Aufgaben für das Lernen
Leistungserwartung, Leistungserleben	Neugier, Kreativität, Entdecken
Fehler vermeiden	Fehler als Chance
Äußerer Anlass	Aufforderungscharakter, Problemorientierung
Einzelleistung & Bewertbarkeit	Kooperation & Kommunikation
Produktorientiert	Prozessorientiert
„Wichtig ist, was Schüler aus ihren Kompetenzen machen.“	„Wichtig ist, was im Kopf der Schüler stattfindet.“

Ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben

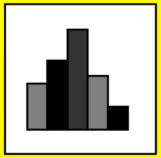


Ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben

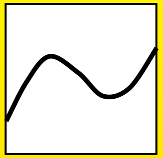


Inhalte ✓

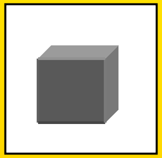
Prozesse

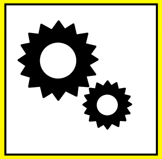


3:2



x+y



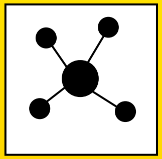


Modellieren

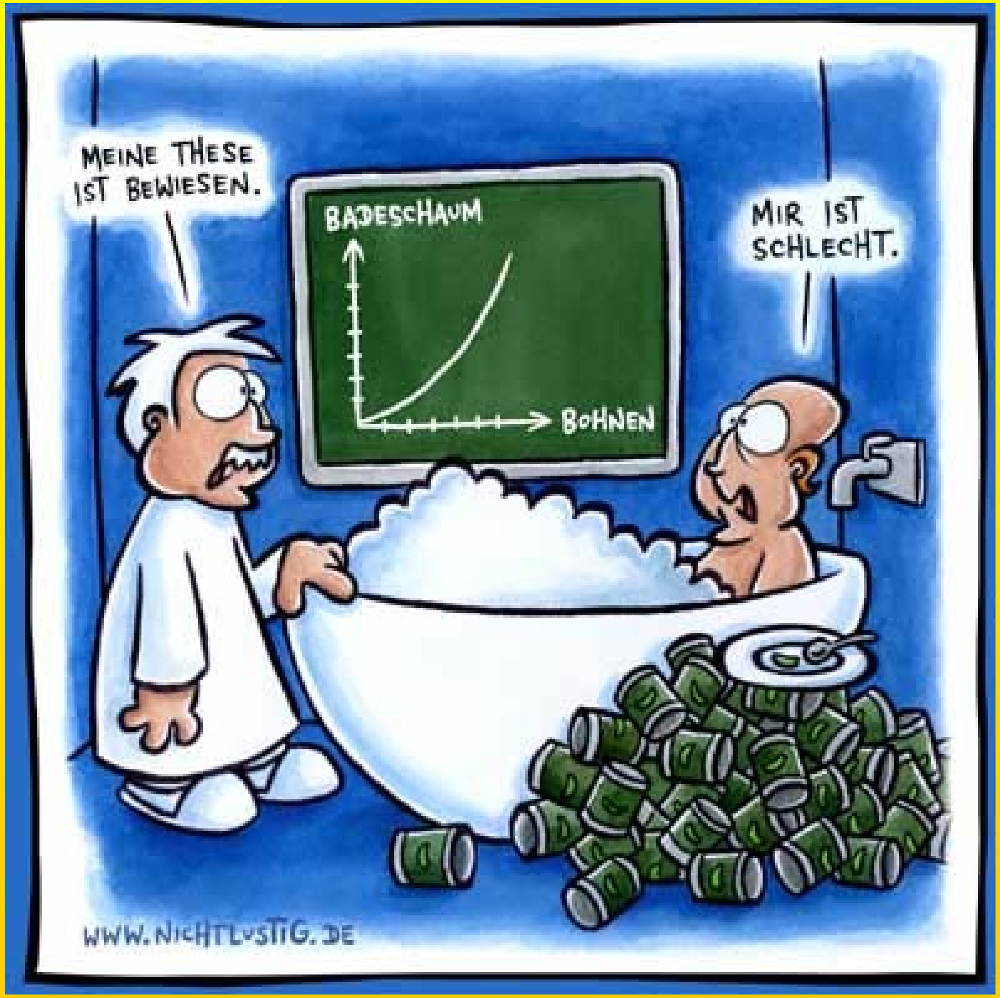
Problemlösen

Argumentieren

Begriffsbilden

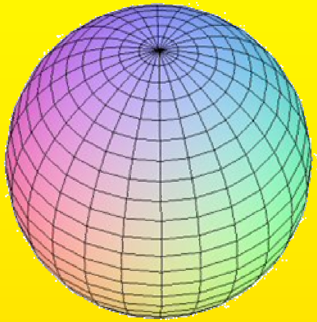


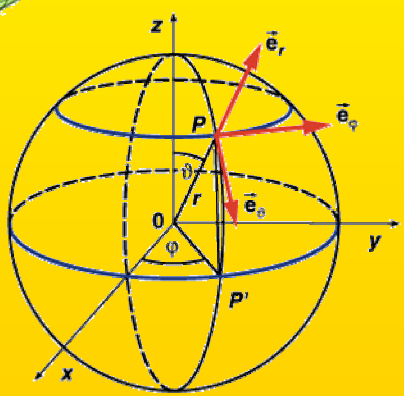
Modellieren



Mathematik und der Rest der Welt

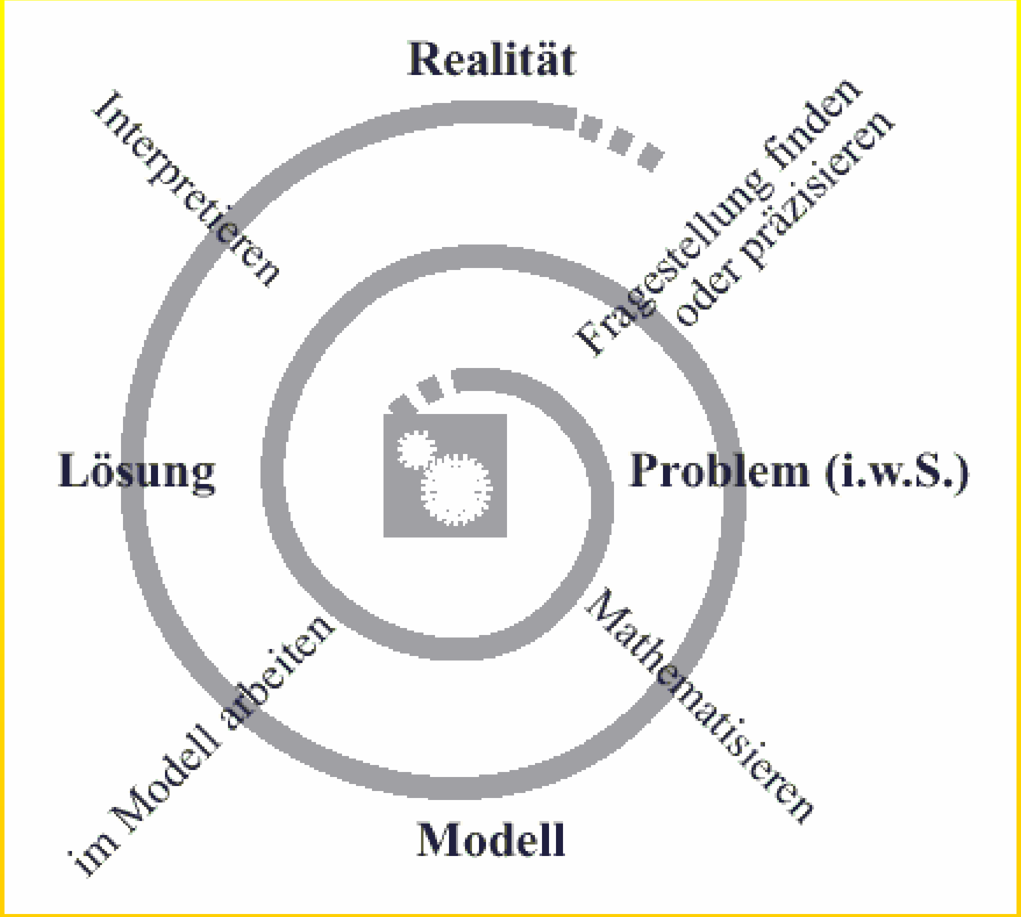
Mathematisieren





Interpretieren

Modellierenspirale

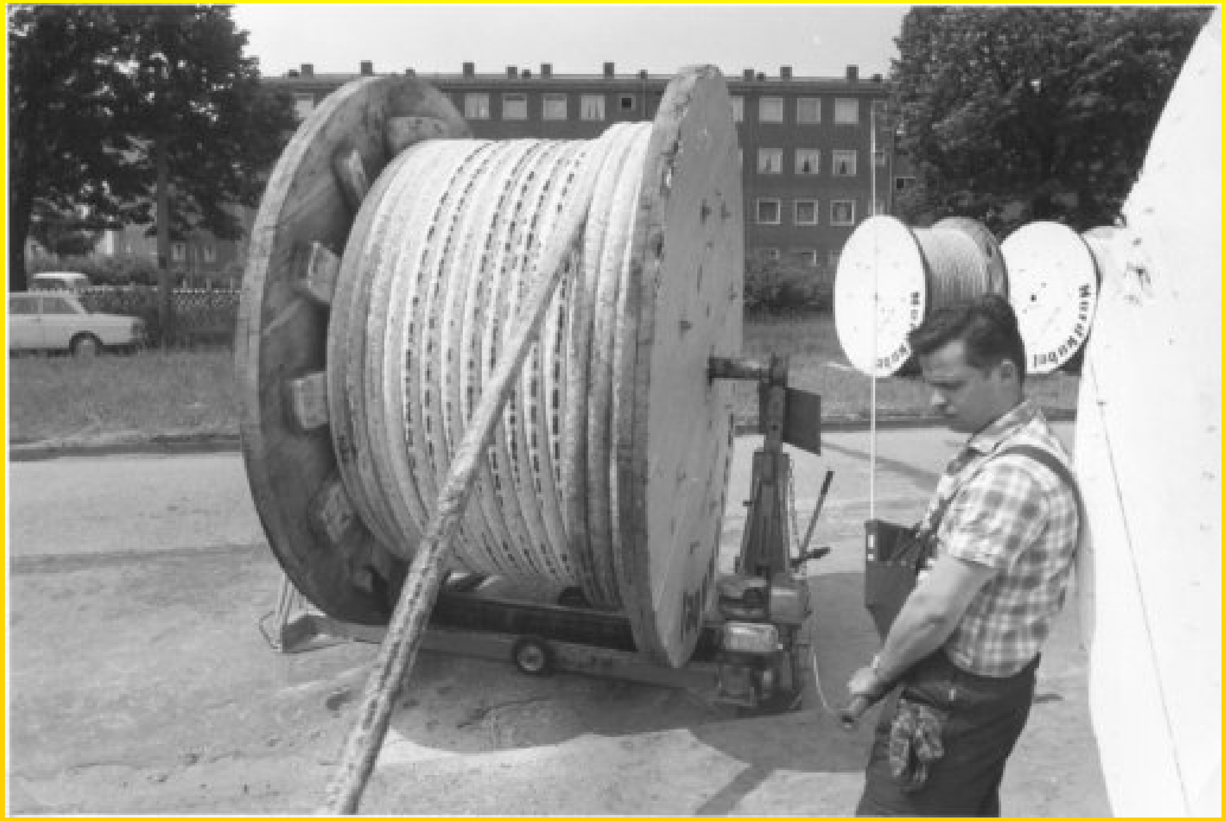


Aufgaben ausloten ...

Bei einem Schulfest werden 280 Teilnehmer erwartet. Pro Person werden 0,8 l Getränke bereitgestellt. Es kommen aber 320 Besucher. Wie viel l Getränke stehen jetzt pro Person zur Verfügung?

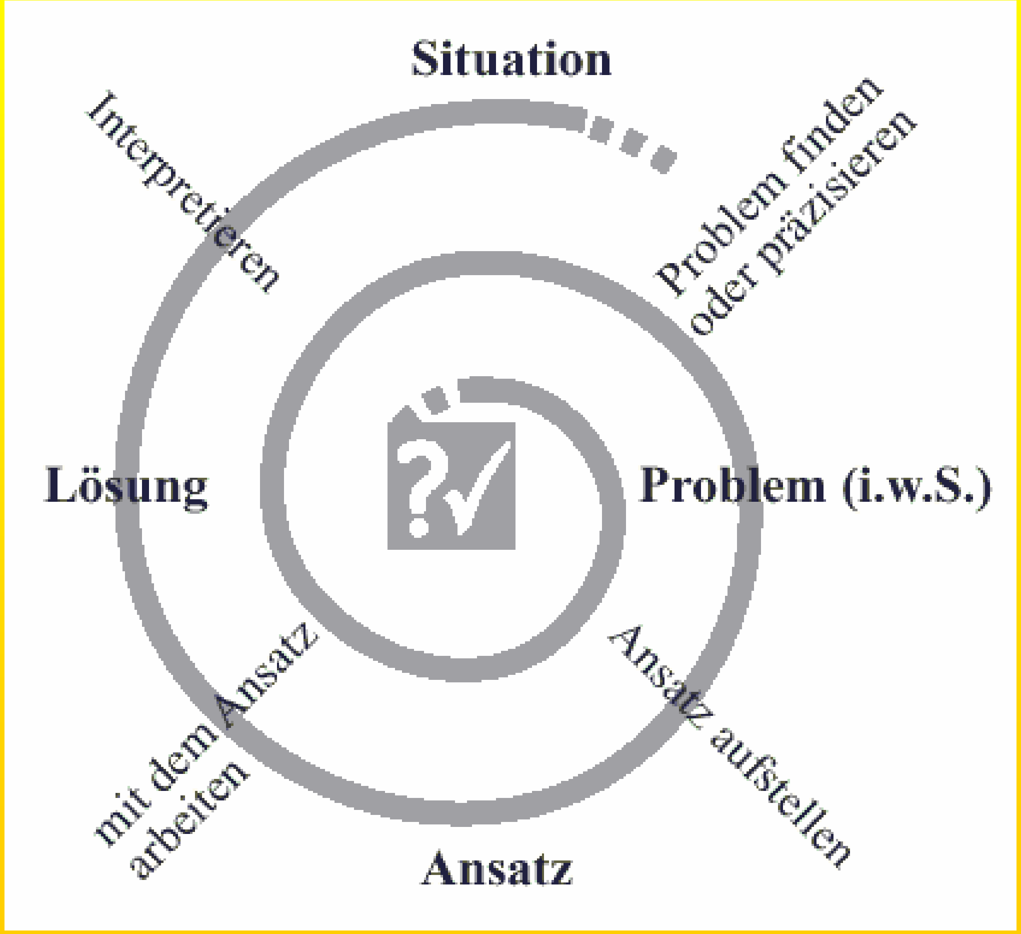
(Cornelsen, Mathematik 7. Schuljahr, 1993)

Nicht immer alles – oder der Schutz vor überhöhten Ansprüchen ...



Problemlösen

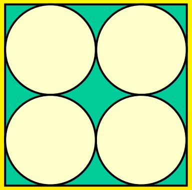
Problemlösenspirale



Probleme selbst finden

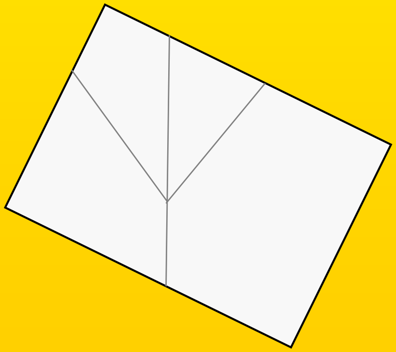
(a) „Aufgabenvariation“ (Schupp 2002)

Schneide aus einem Quadrat vier gleiche Kreise mit möglichst großer Gesamtfläche aus.



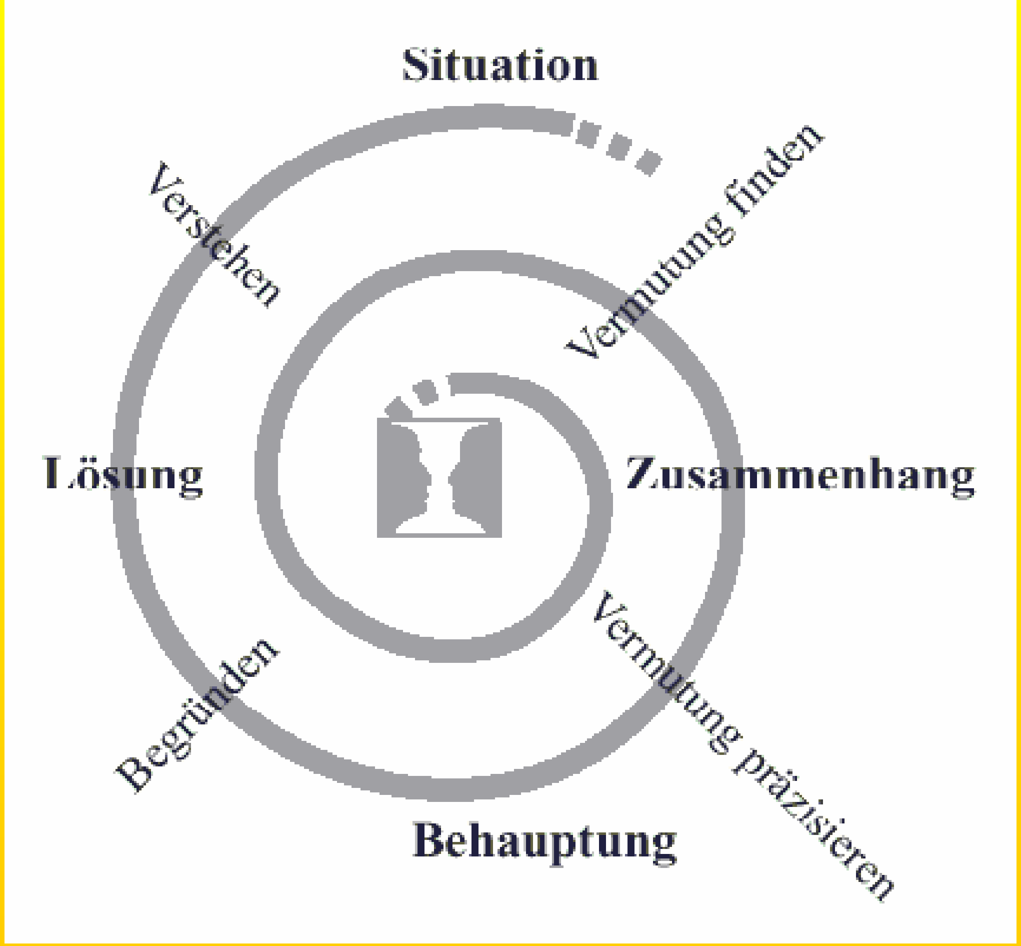
(b) Ergebnisoffene Aufgaben (Becker/Shimada 1997)

Falte ein DIN A4-Blatt einmal, zweimal oder dreimal. Finde dann möglichst viele Beziehungen zwischen den Winkeln.



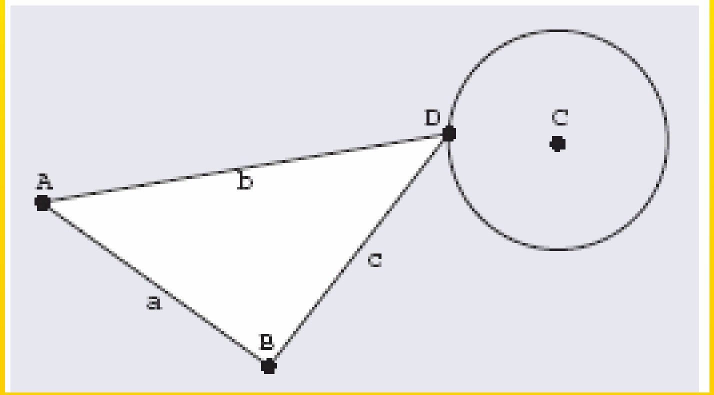
Argumentieren

Argumentierenspirale

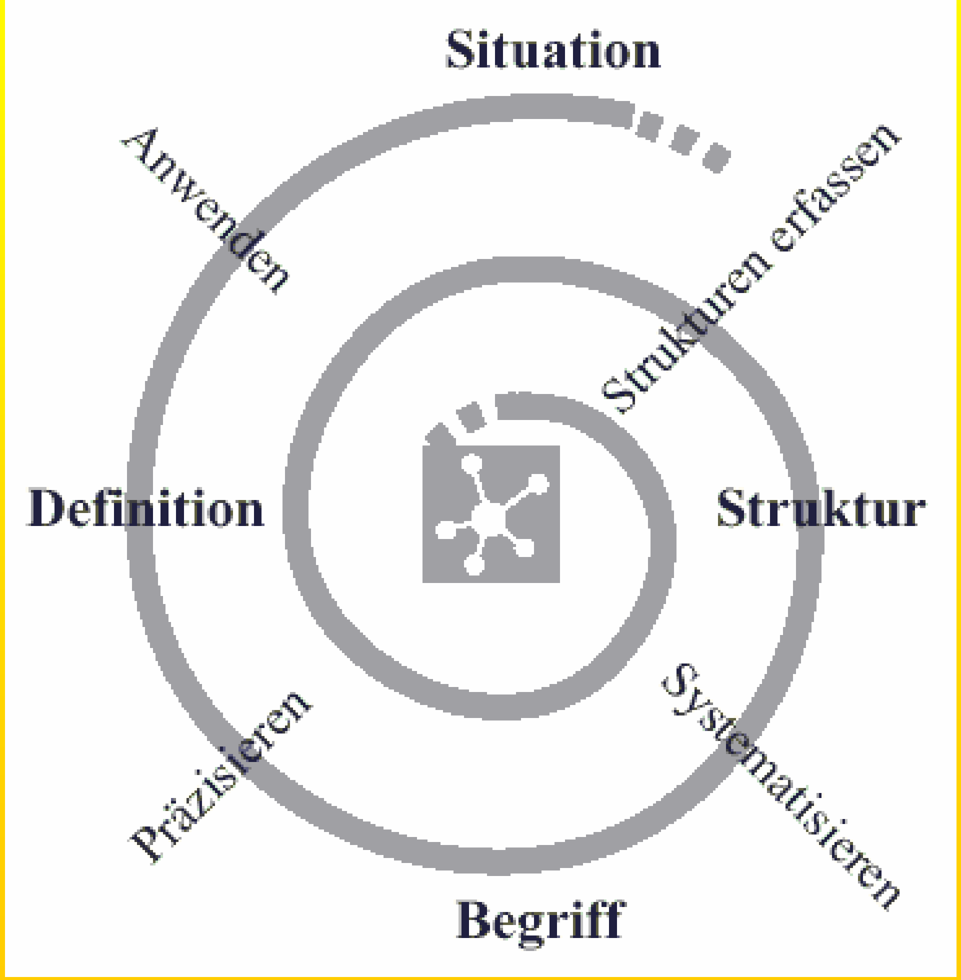


Authentisches Argumentieren

- „Konstruiere Dreiecke, Vierecke oder andere Figuren und lass jeweils einen Eckpunkt auf speziellen Kurven laufen, z. B. auf Geraden oder Kreisen. Beobachte, wie sich Umfang, Fläche, bestimmte Winkel oder andere Größen dieser Figur verändern. Stelle Vermutungen auf und versuche, diese zu begründen."
- „Vermutung: Das Dreieck hat den kleinsten Flächeninhalt, wenn D am nächsten an der verlängerten Seite a liegt!"



Begriffsbildenspirale



Beispiel: Achsensymmetrie I

Autologos

Untersuche die Logos der Automarken. Nimm dazu, wenn möglich, einen kleinen Spiegel zur Hand. Welche Logos passen zusammen? Schreibe auf, warum du jeweils diese Logos zu einer Gruppe zusammengefasst hast.

Vergleicht eure Ergebnisse und diskutiert miteinander, wenn ihr verschiedene Entscheidungen getroffen habt.

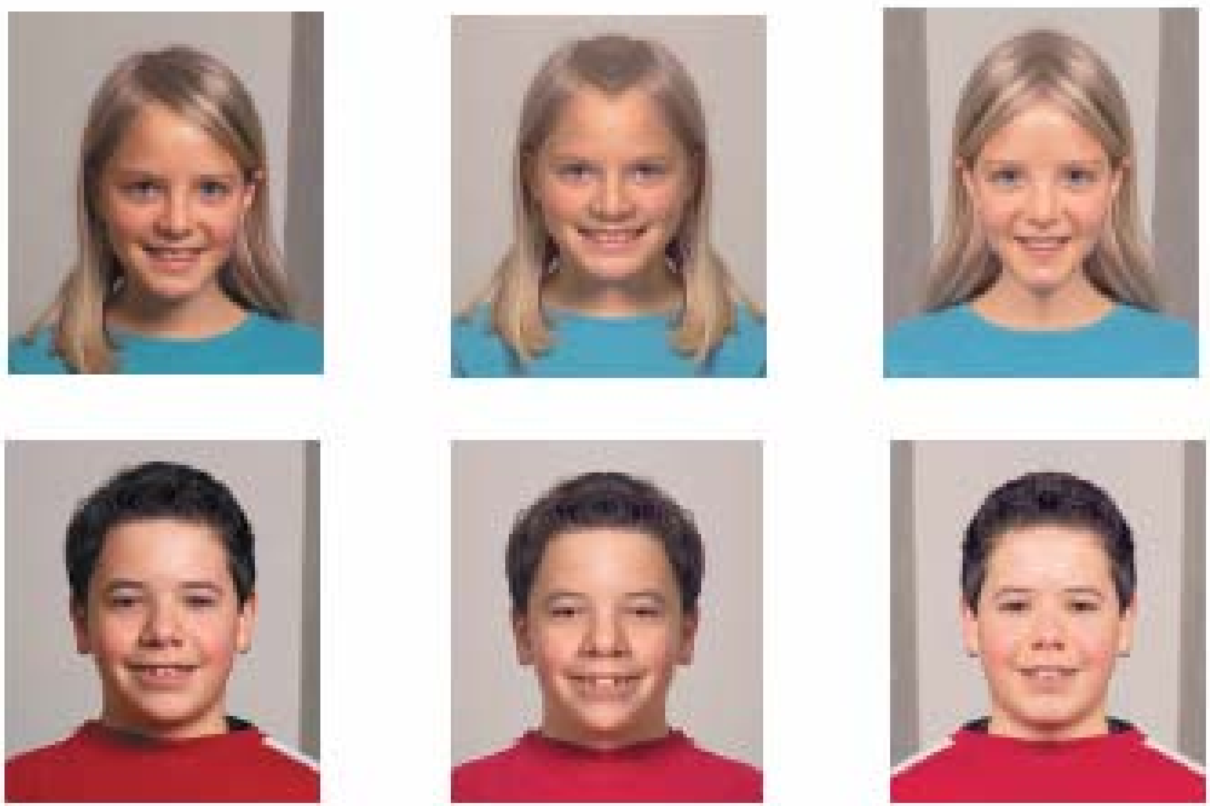
Beispiel: Achsensymmetrie II

Tiere
Verfahrt mit den Bildern aus dem Pflanzen- und Tierreich ebenso wie bei den Autologos.

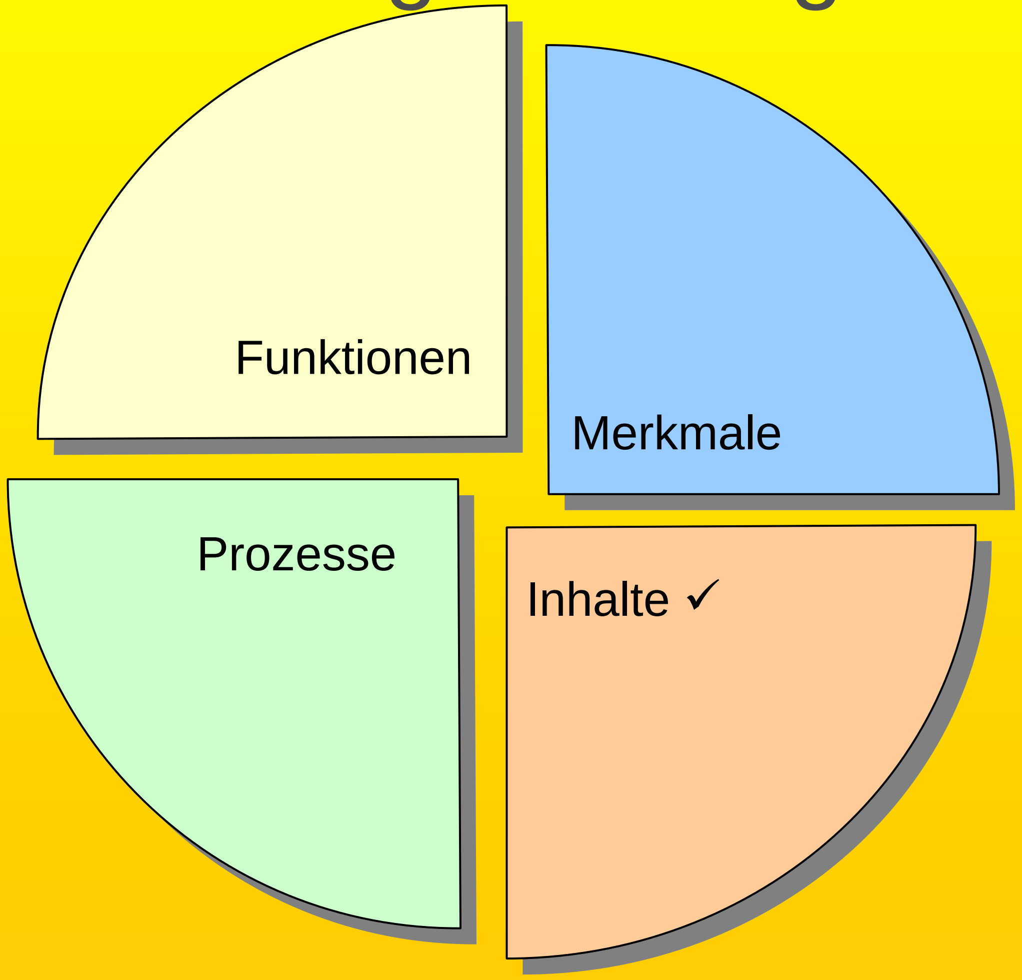
Beispiel: Achsensymmetrie III

„Verrückte" Gesichter

Was ist mit den Gesichtern passiert? Mit einer Digitalkamera und einem Computer könnt ihr ähnliche Bilder erzeugen – oder ihr nehmt einfach einen Spiegel



Ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben



Ein Modell für die Bewertung und Entwicklung von Aufgaben

Merkmale von Aufgaben

- Authentizität
- Offenheit
- Differenzierungsvermögen

Merkmale

Öffnungstechniken

- Öffne die Grundformen „Beispielaufgabe“ oder „geschlossene Aufgabe“ durch Umkehrung, durch Variation oder durch Weglassen.
- Jede geschlossenen Aufgabe, jedes Problem und jedes Aufstellen eines Modells lassen sich umkehren.
- Durch Weglassen von Ausgangsdaten oder Verfahrensvorschriften lassen sich geschlossenen Aufgaben öffnen.

Umkehrung

Aus der geschlossenen Aufgabe

- „Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Grundseite 8 cm und Höhe 9 cm."

wird durch Umkehrung

- „Gib mögliche Längen von Grundseite und Höhe eines Dreiecks an, dessen Flächeninhalt 72 cm^2 beträgt.",

wodurch weitere Variationen nahe gelegt werden:

- „Wie viele ganzzahlige Kombinationen von Länge der Grundseite und Länge der Höhe gibt es dabei?"
- „Zeichne verschiedene Dreiecke mit der gleichen Grundseite und dem Flächeninhalt 72 cm^2."

Weglassen I

Aus der geschlossenen Aufgabe

- „Ein Kinobesitzer will am ruhigen Montag Kunden anlocken. Daher bietet er an diesem Tag alle Karten zu 3 € statt zu 8 € an. Statt der üblichen 30 Besucher kommen 50. Hat sich die Aktion gelohnt?“

wird durch Weglassen

- „Ein Kinobesitzer will am ruhigen Montag seine Auslastung verbessern. Üblicherweise kommen nur ca. 30 Besucher. Seine Konkurrenz lockt die Besucher montags mit niedrigeren Preisen, das möchte er nun auch machen. Wann genau lohnt sich seine Aktion?“

Weglassen II

a) Aus einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge a wird eine Kreisscheibe wie in Fig. 3 herausgeschnitten. Wie viel Prozent beträgt der Abfall?

b) Aus einer quadratischen Platte werden wie in Fig. 4 vier (neun, n^2) gleich große Kreisscheiben herausgeschnitten.
Wie viel Prozent beträgt der Abfall? Was fällt auf?

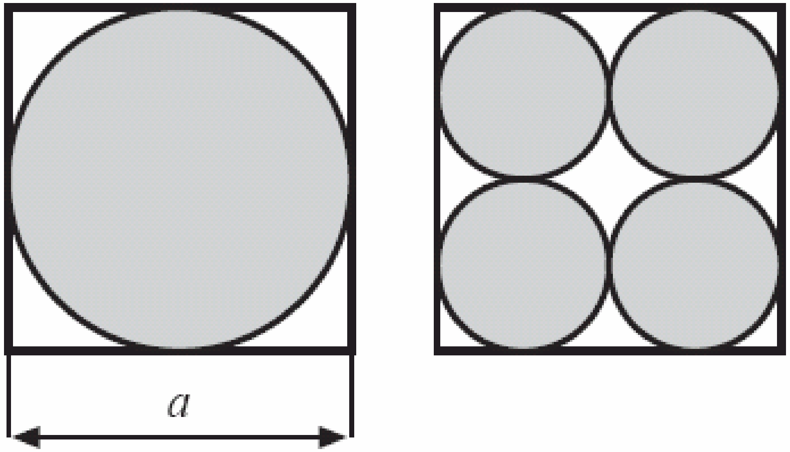
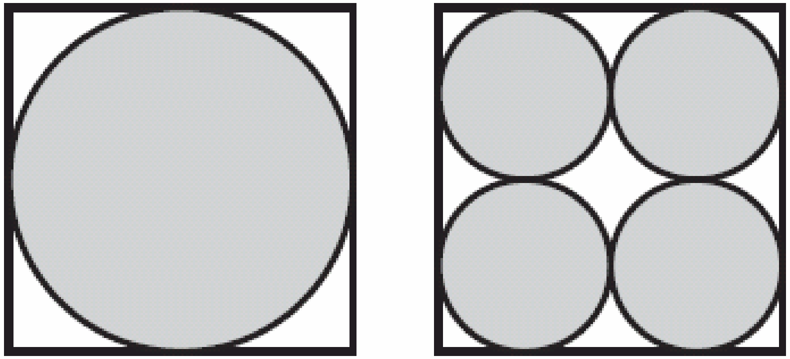


Fig. 3 Fig. 4

Aus: Lambacher/Schweizer, Gymnasium, NRW, 10. Klasse, 2000, S. 93

Weglassen II

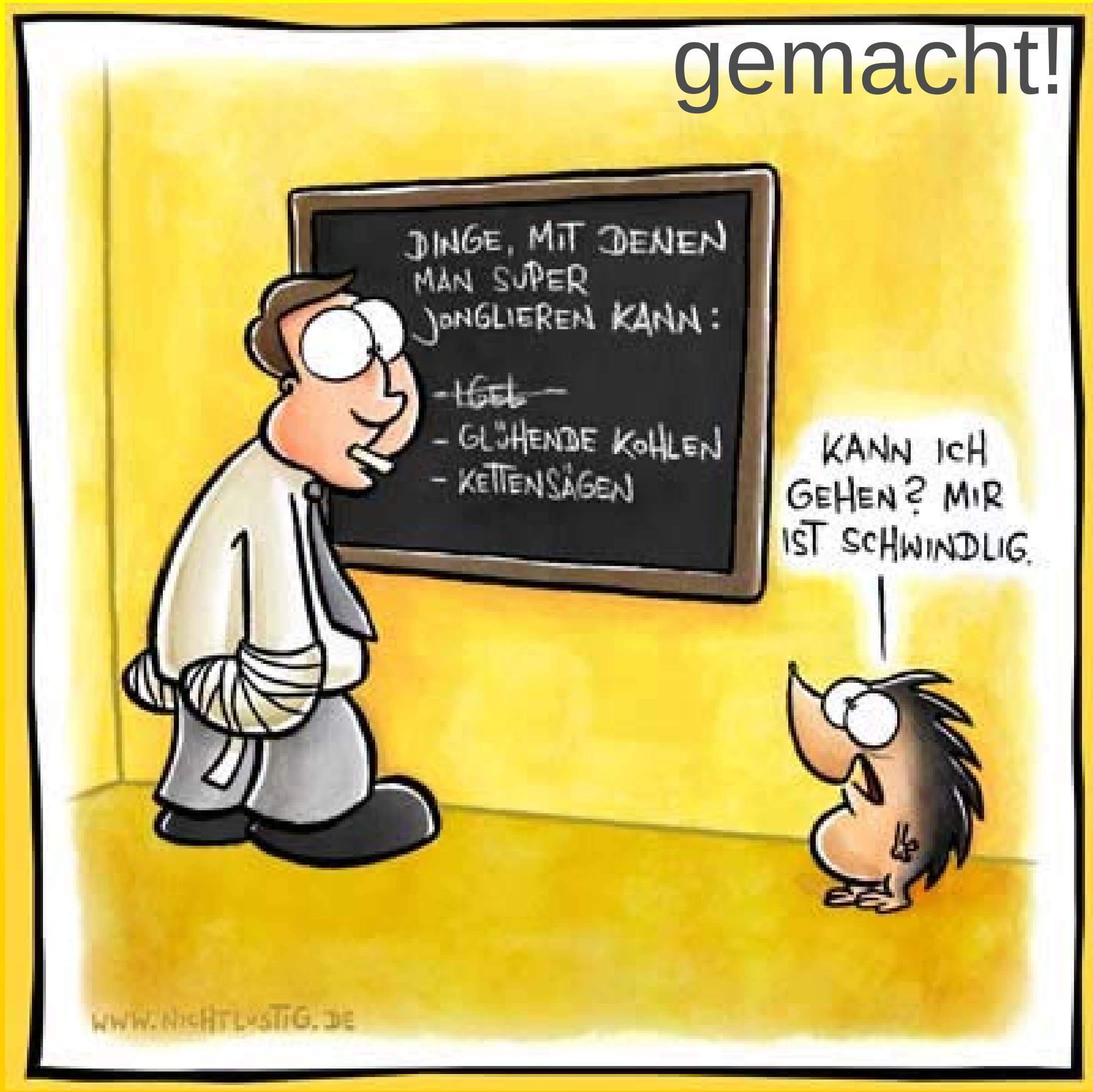
Schneide aus einem gegebenen Quadrat Kreise mit gleichem Radius aus. Dabei soll vom Quadrat möglichst wenig übrig bleiben.



Aufgabenentwicklung als Handwerk – Konzepte, Techniken und Instrumente

- Erfahrungsbasiertes Vorgehen in der Lehrerfortbildung (Lehrerinnen und Lehrer habe häufig kaum noch eigene Erfahrungen in der Bearbeitung „unbekannter“ Aufgaben!)
- Aufgaben bearbeiten – Aufgaben konstruieren – Aufgaben diskutieren – Kriterien entwickeln
- Techniken zur zielgerichteten Veränderung der Qualität von Aufgaben im Hinblick auf die jeweilige Funktionen und Prozesse (Öffnungstechniken, Variationstechniken)
- Instrumente zur Reflexion und Entwicklung (Prozessspiralen)

Erste Erfahrungen werden gerade gemacht!



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Arbeiten in der Aufgabenwerkstatt

- Phase I (Kleingruppen)
  - Wählen Sie eine Schulbuchaufgabe aus. Diskutieren Sie, was Schülerinnen und Schüler können müssen, um die Aufgabe erfolgreich zu bearbeiten.
  - Verändern Sie die Aufgabe nun zu einer Lernaufgabe, mit der die Schülerinnen und Schüler die erforderlichen Fähigkeiten oder Begriffe entwickeln können. (ggf. mit Öffnungstechniken, Aufgabenvariation, Prozessspiralen ...)
- Phase II (Plenum)
  - Präsentation der veränderten Aufgaben, der Intentionen bei der Veränderung und der Erfahrungen hierbei.