

Bernd Wollring, Universität Kassel

Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule

Vorlage zu einem Text in der Schriftenreihe der Arbeitsgruppe „Empirische Bildungsforschung“ an der Universität Kassel

Handout für Teilnehmende am Workshop „Handlungsorientierte und kommunikative Lernumgebungen zur Geometrie am Beispiel von Würfelnetzen, passend für die Jahrgangsstufen 2, 3, 4 und andere“ im Rahmen der Herbsttagung des SINUS-Transfer Grundschulprojektes im September 2007 in Erkner

Zum Eingang

Mathematikdidaktik als „Design Science“ (Wittmann 1992, 1998), kennzeichnet eine Perspektive, welche die Aufgabe der fachdidaktischen Unterrichtsforschung darin sieht, unterrichtsbestimmende Bauelemente zu analysieren und zu entwickeln, für die sich die Bezeichnungen „Lernumgebung“ und „Arbeitsumgebung“ konsolidiert haben. Angereichert wird dieser Ansatz durch systematisches Einbinden von „Eigenproduktionen“ (Treffers 1983, Selter 1993), durch die Sicht auf „Heterogenität“ und das Flexibilisieren zur Differenzierung (Hengartner 1999, 2002), durch die Perspektive des selbstbestimmten und „selbstregulierten“ Lernens (Leutner et al. 2004) und durch das Verbinden mit einer „Unterrichtskultur der Anerkennung“ (Prenzel 2004). Diese Positionen kennzeichnen die Fachdidaktik, insbesondere die Didaktik der Mathematik für die Grundschule, durch das Wechselwirken von Diagnostik und Design (Wollring 1999).

Wir nehmen das Konzept der Lernumgebungen auf, basieren es auf einer konstruktivistischen Grundposition und einer Position zur Anerkennungskultur, kennzeichnen Lernumgebungen durch sechs Leitideen und beschreiben im Zusammenhang damit vier spezifische Aspekte von Eigenproduktionen.

Fachdidaktischen Bedarf und fachdidaktische Arbeitsfelder sehen wir in *Forschung, Entwicklung, Dissemination* und *Implementation*. Schwerpunkte universitärer Beiträge dazu liegen in der Forschung und Entwicklung unter Berücksichtigen der Möglichkeiten zur Dissemination und Implementation. In diesem Kontext ist das Entwickeln von Lernumgebungen ein auf den Unterricht bezogenes universitäres „Produktformat“ von zunehmender Bedeutung.

Konstruktivistische Grundposition

Wir vertreten eine „konstruktivistische Grundposition“ zum Lehren und Lernen in der Grundschule.

Aus konstruktivistischer Sicht ist Lernen vielmehr ein *aktives Konstruieren von Sinn*, das ein *autonom lernendes Individuum* vollzieht. Ein solches *aktiv-konstruierendes* Lernen, speziell im Fach Mathematik, wird unterstützt durch einen Unterrichtsrahmen, der *selbstbestimmtes Lernen, aktiv-entdeckendes*

Lernen und *soziales Lernen* im Austausch miteinander ermöglicht und fördert (Winter 1989, Wittmann 1997). Lernen in der Grundschule ist demnach nicht primär als ein Vermitteln oder als ein wesentlich lehrerzentrierter „transmissiver“ Vorgang zu sehen. Die Rolle der Lehrerinnen und Lehrer besteht bei dieser Sicht „lokal“ vorrangig darin, die Schülerinnen und Schüler als autonome aktiv Lernende zu begreifen und durch *effizientes Moderieren* und *angemessen ergänzendes Informieren* zu unterstützen. „Global“ besteht sie darin, „*substanzielle*“ *Lernumgebungen zu konzipieren*, anzubieten und auszugestalten und die Eigenproduktionen dazu kompetent zu analysieren, zu diagnostizieren und für das weitere Arbeiten zu nutzen.

Gleichgewichte von Positionen

Über die konstruktivistische Grundposition hinaus sehen wir für den Unterricht bestimmte Gleichgewichte von Positionen als bedeutsam.

Ein solches beschreibt etwa Donaldson als das „*Gleichgewicht von Invention und Konvention*“. Für den Mathematikunterricht in der Grundschule kennzeichnet dies die Notwendigkeit, dem „Neu-Erfinden“ von Bestehendem hinreichenden Raum zu geben und das aktive Konstruieren nicht vorzeitig durch zu starkes Fixieren auf bestehende Bezeichnungen und Konventionen zu lähmen.

Wir betonen ferner die Notwendigkeit zu einem „*Gleichgewicht zwischen informativem Lernen und eigenverantwortlich organisiertem Lernen*“. Dies mag zunächst fremd anmuten. Gemeint ist, dass die Lehrerin und der Lehrer die notwendige fundierte Kenntnis über die spezifische Sachlage haben, zudem den Überblick über die Vielfalt der zu dem aktuellen Problem gehörenden möglichen Ergebnisse und Strategien, so dass sie imstande sind, die Aktivitäten der Kinder durch geeignete nicht zu weit gehende Impulse zu unterstützen und zu ergänzen und den Kindern eine ergiebige Quelle für verlässliche sachliche Informationen zu sein.

Denn bisweilen führt die gut gemeinte Organisation von überfordernder Eigenverantwortlichkeit dazu, dass die Kinder auch nach intensivem Befassen mit einer Arbeitssituation nicht die angestrebten Kenntnisse erarbeitet haben. Dies ist ein spezifisches Problem eines falsch verstandenen und falsch organisierten Lernens in Gruppen, das sich divergent entwickeln kann, wie es etwa beim „Lernen an Stationen“ im Mathematikunterricht bei mangelndem Aufarbeiten der an den Stationen entstandenen „pluralen“ Arbeitsergebnisse der Kinder möglich ist.

Anerkennungskultur

Die genannten Positionen konvergieren in einer Position, die wir mit dem Begriff der *Anerkennungskultur* kennzeichnen (Prengel 2004). Wir sehen sie wesentlich darin, dass Lehrerinnen und Lehrer imstande sind, Teilleistungen der Kinder, noch nicht vollständige Lösungen oder erst teilweise entwickelte Strategieansätze positiv wertend in die Arbeit einer Lerngruppe aufzunehmen.

Wesentliches Element in einem von Anerkennungskultur bestimmten Klassenklima ist die positiv wertende und kompetenzorientierte Sicht auf die Beiträge der Kinder im Gegensatz zu einer defizitori-

entierten Sicht, die vorrangig betont, was an dem Beitrag eines Kindes zur Vollständigkeit oder zur Richtigkeit noch fehlt.

Teilleistungen haben bei dieser Sicht eine zweifache Funktion: Zum einen sind sie sachlich nutzbare Beiträge zum Unterricht, zum anderen sind sie Beiträge zur Stärkung des Selbstkonzeptes der Lernenden. Darin liegt einer der wesentlichen Gründe für die Notwendigkeit einer fundierten fachdidaktisch getragenen Diagnosekompetenz als Ausbildungselement für Lehrerinnen und Lehrer.

Initiiierendes Problemfeld: Mathematikbild und realer Mathematikunterricht in der Grundschule

Die hier vorliegenden von der technischen Organisation ausgehend in die intellektuelle Organisation des Unterrichts verweisenden Ideen zu Lernumgebungen sind zugegebenermaßen am Kondensationskern des Mathematikunterrichtes für die Grundschule entstanden.

Abgesehen davon, dass der Autor diesem Arbeitsfeld spezifisch verbunden ist, gibt es dafür umfassende Ursachen. Der Mathematikunterricht in der Grundschule erfährt in den Bewertungen der Kompetenzen die aus ihm hervorgehen sollen, eine extrem hohe Einschätzung in unserer Gesellschaft. Man ist sich auch unter Fachleuten wie unter Bildungswissenschaftlern einig, dass diese Kompetenzen so etwas wie Grundwerte einer Allgemeinbildung in der Grundschule darstellen. Nun ist dieser Effekt leider von dem Fakt begleitet, dass gerade dieses Fach in vielen Bundesländern nur von einem Teil derjenigen studiert und durch ein Examen abgeschlossen ist, die es in der Grundschule unterrichten. Dies führt unter anderem dazu, dass in den Grundschulen ein in gewissem Sinn verengtes und traditionsstabilisiertes Mathematikbild den Unterricht bestimmt.

Ein Signal, das Experten alarmieren sollte, ist der nicht enden wollende Versuch, einen Terminus wie „*Rechenschwäche*“ oder „*Dyskalkulie*“ in der Bildungslandschaft justiziabel zu verankern. Der Autor verneint keineswegs, dass es Kinder gibt, die im Mathematikunterricht problematische Leistungen zeigen, und deren Leistungsfähigkeit einer Behinderung gleich kommt. Aber das ist beileibe nicht die Mehrheit, und die Kinder mit problematischen Mathematikleistungen insgesamt rechtfertigen in ihrer Vielzahl kaum eine Diskriminierung als behindert oder auch nur leistungsschwach. Die genannten Begriffe verweisen nach Auffassung des Autors vielmehr in unberechtigter Weise darauf, dass die Ursache der problematischen Mathematikleistungen primär im Kind gesucht wird und nicht im Unterricht mit all seinen organisatorischen und personellen Bedingungen. Der Begriff verweist ferner auf ein verengtes Mathematikbild, dessen Schwerpunkte durch Rechnen und Fertigkeiten gekennzeichnet sind. Diese Schwerpunktsetzung ist eine der innovationsresistentesten überhaupt und es ist zu hoffen, dass den auf Bundesebene verabschiedeten Bildungsstandards (KMK 2004) der Erfolg beschieden ist, dieses Mathematikbild zu erweitern, sowohl in den Gegenstandsbereichen in Richtung auf *Arithmetik – Geometrie – Anwendungen* als auch in den Anforderungsebenen, wie sie etwa durch *Reproduzieren – Verbindungen schaffen – Verallgemeinern* in dem entsprechenden hessischen Konzept der Orientierungsarbeiten dargelegt sind (KMK 2004, HKM 2006).

Aufgaben, Aufgabenformate und Lernumgebungen

Das zentrale Organisationselement des Mathematikunterrichtes sind Aufgaben. Aufgaben sind daher in ihrer Struktur, ihrer Darstellung und ihrer Evaluierbarkeit seit längerem Gegenstand der empirischen Bildungsforschung. Aufgaben sind gewissermaßen die kleinsten Organisationseinheiten des Mathematikunterrichtes und Lernumgebungen sind nach unserer Auffassung „große gerahmte Aufgabenfelder“. Das Konzept der Lernumgebungen, wie es im Folgenden entfaltet wird, ist nach Auffassung des Autors daher im Mathematikunterricht der Grundschule nur dann wirksam, wenn in der spezifischen „kleinen“ Aufgabe bereits die „umfassende“ Lernumgebung für Lehrende sichtbar wird.

Dies wird möglicherweise deutlich, wenn man die Organisationsformen des Mathematikunterrichtes nicht allein aber wesentlich durch die folgende Sequenz beschreibt:

Aufgaben \subset Aufgabenformat \subset Lernumgebung

Eine wünschenswerte Lehrerkompetenz sieht der Autor darin, dass diese Sequenz zu Konzeption von Unterricht flexibel aufwärts wie abwärts durchlaufen wird, um so Anpassungen und Flexibilität aus Kernelementen heraus entwickeln zu können. Aufgaben sind gewissermaßen Repräsentanten großer Komplexe, in denen Lehrende sich steuernd bewegen können bis sie bei ihren Adressaten als Resonanz das beobachten, was derzeit in den Projekten unserer Forschergruppe mit „*kognitiver Aktivierung*“ bezeichnet wird.

Durchlaufen einmal wir die genannte Sequenz: Eine Aufgabe im Mathematikunterricht ist durch eine gewisse Spezifiziertheit gekennzeichnet. In dieser Spezifiziertheit aber sollte unter der Perspektive Lernumgebungen zu schaffen, gerade die Wandelbarkeit erkannt werden. Es geht hier nicht nur darum, zwischen offenen Aufgaben, die einen Befund erfordern und nicht offenen Aufgaben zu unterscheiden. Es geht vielmehr darum, in bestimmten Elementen einer Aufgabe ansteuerbare Organisationselemente zu sehen. So bietet etwa das verwendete Zahlenmaterial in einer Aufgabe einen solchen Ansatz zum Aussteuern. Bestimmte andere Elemente steuern Umfang und Schwierigkeitsgrad und wiederum andere Elemente steuern die Option, die Aufgabe individuell oder kooperativ zu bearbeiten. Eine in diesem Sinne flexibel gesehene, in der Regel schriftlich formulierte Aufgabe nennen wir ein Aufgabenformat. Ohne es hier auszuarbeiten geben wir als illustrierende Beispiele einfach nur zwei Stichworte: Aufgabenformat „*Zahlenmauern*“ und Aufgabenformat „*Stau-Aufgabe*“.

Aufgabenformate sind in der Regel schriftlich dokumentierbar und z. T. in Kompendien schriftlich vorbereitet zu finden. Eine Lernumgebung entsteht aus einem Aufgabenformat durch die konkrete Realisierung vor Ort im Unterricht. Hier stellt gerade die Grundschule umfassende Anforderungen an das Implementieren, die in den konfektioniert vorbereiteten Unterrichtsmaterialien nicht berücksichtigt sein können, sondern von dem Lehrenden spezifische Entscheidungen und Strukturierungen verlangen, die der konkreten Situation Rechnung tragen. Die Anforderungen an diese Implementierung sind in den Leitideen dargestellt.

Lernumgebungen: Leitideen zum Design

Die Bezeichnungen *Lernumgebung* und *Arbeitsumgebung* werden im Folgenden synonym genutzt. Kennzeichnungen als „Arbeits- und Lernumgebung“ oder „Lern- und Arbeitsumgebung“ im aktuellen Diskurs belegen diese Synonymität. Sie kennzeichnen die Auffassung, dass Lern- und Arbeitsumgebungen sowohl für das individuelle Lernen als auch für das soziale Lernen in einer kleineren oder größeren Gemeinschaft als Organisationsform gemeint sind.

Der Terminus *Lernumgebung* als Erweiterung des üblichen Begriffs *Aufgabe* beschreibt im Wesentlichen eine *Arbeitssituation als Ganzes*, die aktiv entdeckendes und soziales Lernen ermöglichen und unterstützen soll (vgl. Wittmann 1997).

Eine Lernumgebung ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine „gute Aufgabe“ nennt. Eine Lernumgebung ist gewissermaßen eine *flexible Aufgabe* oder besser, eine *flexible große Aufgabe*. Sie besteht aus einem *Netzwerk kleinerer Aufgaben*, die durch bestimmte Leitgedanken zusammen gebunden werden.

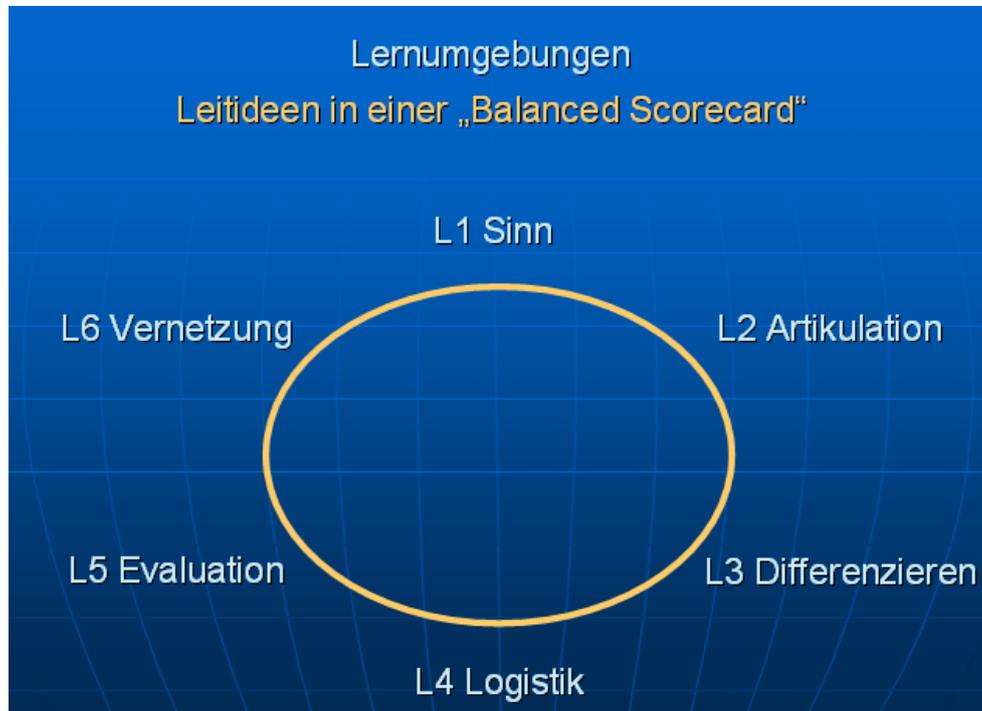
Wir unterscheiden sechs Leitideen zum Design von Lernumgebungen:

- L1 Gegenstand und Sinn, Fach-Sinn und Werk-Sinn
- L2 Artikulation, Kommunikation, Soziale Organisation
- L3 Differenzieren
- L4 Logistik
- L5 Evaluation
- L6 Vernetzung mit anderen Lernumgebungen

Die Leitideen sind keine trennscharfen und klassifizierenden Kennzeichnungsbausteine, vielmehr beschreiben sie die Ganzheit einer Lernumgebung anhand verschiedener Aspekte. So kann eine Lernumgebung - und das ist wohl die derzeit häufigste Darstellungsform - auf einer Schulbuchseite basieren, gerahmt durch geeignete Organisationselemente und Informationen. Sie kann aber auch aus einem differenzierten und komplexen Materialsatz bestehen, der eine gezielte logistische Bereitstellung erfordert und der geeignete Organisationsdokumente und Hilfsmittel einschließt.

Es ist eine hilfreiche Vorstellung, sich die Leitideen und ihre Auswirkung auf die konkrete Ausformung einer Lernumgebung wie kooperierende Diskussionsteilnehmer vorzustellen, deren Arbeit sowohl kontroverse als auch konsensuelle Elemente aufweist. Konkret bedeutet dies, dass das reale Implementieren von Lernumgebungen vor Ort stets auf organisatorischen Kompromissen zwischen den Impulsen beruht, die von den einzelnen Leitideen ausgehen. Eine Ausbalanciertheit dieser Einflüsse ergibt sich erst als Unterrichtskonzept beim Implementieren vieler Lernumgebungen in derselben konkreten Lerngruppe. Der Idee und Forderung der Ausbalanciertheit zwischen den verschiedenen Leitideen steht ein bewusstes lokales und temporäres Setzen von Schwerpunkten gegenüber, um bestimmte aktuelle Probleme anfassen zu können.

Das Zusammenwirken der Leitideen in einer „Balanced Scorecard“ („ausgewogene Bewertungstafel“) zeigt das folgende Bild.



In diesem Sinne sehen wir Lernumgebungen und die sie bestimmenden Leitideen als einen Ausformungsrahmen für Aufgaben und Aufgabenformate der wesentlich durch die Entscheidungen einzelner Lehrender oder Teams von Lehrenden angesichts der ihnen konkret begegnenden Problemlage bestimmt ist. Ein sinnvolles Element der Lehrerbildung sieht der Autor daher darin, Lehrende dazu zu befähigen, ausgehend von konkreten Aufgaben Aufgabenformate und Lernumgebungen zu sehen und entwickeln zu können und ausgehend von den rahmenden Ideen einer Lernumgebung Aufgabenformate und Aufgaben entwickeln und evaluieren zu können.

Leitidee 1 Gegenstand und Sinn

Die Leitidee 1, gewissermaßen präsidierend am Kabinetttisch der Leitideen, betrifft die Sinngebung der Gegenstände, die die Lernumgebung bestimmen. Was im Folgenden zur Mathematik gesagt ist, gilt *mutatis mutandis* auch für andere Fächer oder Lernbereiche.

Mathematischer Sinn. Der mathematische Sinn des bearbeiteten Gegenstandes bildet die Grundsubstanz und den Kern der Lernumgebung. Es kann nicht das Ziel sein, sich von den substanziellen Kernen des Faches Mathematik durch vermeintlich Freude und Engagement bringende Aktivitäten zu entfernen. Vielmehr geht es darum, in den Gegenständen und den auf sie bezogenen Aktivitäten substanzielle mathematische Ideen und mathematische Strategien anzusprechen. Diese mathematische

Substanz geht weit über Rechenfertigkeiten hinaus, ist in den Bildungsstandards hervorragend dargestellt und nach allem was man empirisch weiß in geeigneter Formatierung und bei geeigneten Artikulationsangeboten auch für Kinder im Elementarbereich und in der Grundschule erreichbar.

Werksinn. Der Werksinn der bearbeiteten Gegenstände ist ein Element, das insbesondere im Elementarbereich und in der Grundschule einzufordern ist. Natürlich gibt es im Mathematikunterricht wie in allen anderen Unterrichten zu bestimmten Fächern auch Elemente, die ein spezifisches Trainieren bis zur Geläufigkeit erfordern. Aber die Beziehung von Lernenden zum bearbeiteten Gegenstand baut sich im Wesentlichen über den Werksinn auf, d. h. über seine oder ihre spezifische Wertschätzung oder Bedeutungseinschätzung dieses Gegenstandes über die Mathematik hinaus, sei es durch eine Einschätzung der Nutzbarkeit oder sei es durch eine Einschätzung von Schönheit oder Attraktivität. Der Werksinn ist wesentlich bestimmend dafür, positive Bildungserlebnisse als lange haltbare Grundbausteine zum Aufbau eines Wissensnetzes zu gewinnen.

Letzteres verweist darauf, dass eine weitere Sinnggebung die Auswahl des Gegenstandes mitbestimmt: Die erwartete Auswirkung auf das Selbstkonzept der Lernumgebung. Entscheidend ist, dass nach dem Erleben einer Lernumgebung ein Bewusstsein höherer Kompetenz und größerer kognitiver Stärke das Denken des Lernenden bestimmt. Sie muss nicht darin bestehen, dass die intellektuellen Anforderungen, die vom Gegenstand ausgehen, bereits zur Gänze bewältigt sind, sie kann auch darin bestehen, dass eine Auseinandersetzung mit diesem Gegenstand oder dem Feld in das er eingebettet ist, soweit angeregt wird, dass ein selbst tragender Impetus zur Befassung damit ausgelöst wird.

Leitidee 2 Artikulation, Kommunikation, Soziale Organisation

Handeln – Sprechen – Schreiben. Artikulationsformen bezeichnen das Darstellen von Arbeitswegen und Arbeitsergebnissen für den Lernenden selbst, insbesondere aber für andere, sei es die Lehrerin, die an einer Erfolgsbestätigung oder Erfolgskontrolle interessiert ist, oder seien es die Lernpartner, Mitschülerinnen und Mitschüler, die im Rahmen des sozialen Lernens an diesen Wegen und Ergebnissen Anteil nehmen sollen.

Die derzeit aktuellen Maßnahmen zur Qualitätssicherung im Unterricht basieren durchgehend auf schriftlichen Äußerungen der Kinder. Dies ist mit gewissen Einschränkungen für Auswertungen größeren Stils akzeptabel.

Wir vertreten die Auffassung, dass als Artikulationen Handeln, Sprechen und Schreiben insgesamt den Unterricht bestimmen sollten. Für die meisten Kinder gehen Kompetenzen, die sich in Handlungen äußern, den Kompetenzen in mündlichen und schriftlichen Äußerungen zeitlich weit voraus, und wiederum bei den meisten Kindern geht die Kompetenz in den mündlichen Äußerungen der Kompetenz in den schriftlichen Äußerungen voraus. Nach Möglichkeit sollten Lernumgebungen daher alle diese Artikulationsoptionen ausnutzen.

Gerade der Mathematikunterricht leidet häufig unter einer sehr strengen Eingrenzung der zugelassenen Artikulationen. Ein zu frühes Verwenden einer festgelegten und unnatürlichen Fachsprache, ein zu frühes Fordern einer formal korrekten Schriftsprache und ein zu frühes Festlegen formularartiger

Schreibweisen, belasten die gegenseitige Verständigung über mathematische Inhalte und Verfahren in der Grundschule eher als dass sie diese fördern. Lernumgebungen sollten, soweit dies eben geht, den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, ihre Verfahren und Ergebnisse flüchtig und nicht flüchtig darzustellen, und zwar so, dass diese Darstellungen Entdeckungen ermöglichen und unterstützen, bedeutsame Zwischenergebnisse festhalten und dokumentierenden und informierenden Wert für andere haben. Hier kann die Idee einer „doppelten Heftführung“ helfen: Formelle Notizen werden in einem bestimmten Heft festgehalten, informelle Notizen und spontane Ideen in einem anderen, dem „Ideenheft“. (Spindeler 2006)

In der Praxis bedeutet das Fokussieren der Aufmerksamkeit auf verschiedene Dimensionen des Artikulierens häufig nicht allein der Schriftsprache, oder der formalisierten mündlichen Darstellung im Mathematikunterricht zuzulassen. Vielmehr geht es darum, den lernenden Kindern in den frühen Phasen der Erarbeitung eine Vielzahl an Artikulationsmöglichkeiten zur Verfügung zu stellen. Dazu gehören etwa ein informelles provisorisches Verwenden der gesprochenen und der geschriebenen Sprache, Möglichkeiten, ein Material reversibel zu gestalten, Möglichkeiten, das eigene Tun begleitend auf eine nicht flüchtige Art zu dokumentieren, diese Dokumentation aber so zu gestalten, dass auch sie Möglichkeiten der individuellen oder gemeinsamen Aufarbeitung bietet.

Raum zum Gestalten: „Spiel-Raum“. Um in den Lernumgebungen die erforderlichen Optionen zum eigenen Gestalten zu öffnen, ist zu beachten, dass es Bereiche geben sollte, in denen die Gegenstände in ihren jeweiligen materiellen Repräsentationen auch tatsächlich flexibel zu gestalten sind. Diesen Raum zum Gestalten in der Lernumgebung mag man den „Spiel-Raum“ nennen.

Raum zum Behalten: „Dokumente“. Der Spiel-Raum ist zu unterscheiden von dem Raum zum Behalten und durch diesen zu ergänzen. Der Raum zum Behalten umfasst alle Formen der Dokumentation, die für späteres Arbeiten bleiben sollen. Viele uns bekannte Arbeitssituationen leiden in ihrem Artikulationsangebot unter einem Mangel im Bereich des Spielraumes und einem Überangebot im Bereich des Dokumentierens.

Typische Beispiele dazu sind Rechnungen, bei denen als Artikulation nur die niedergeschriebene Endfassung zugelassen ist. Zu ergänzen wären solche Umgebungen durch einen Spielraum für Nebenrechnungen, unterstützende Bilder oder Mind Maps.

Artikulation bestimmt Korrespondenz. Die zugelassenen Artikulationen einer Lernumgebung bestimmen die Möglichkeiten zur Korrespondenz zwischen den Beteiligten, die in dieser Lernumgebung arbeiten. Die Artikulationen sind deswegen auch auf ihre Austauschfähigkeit hin zu konzipieren. Die Korrespondenzoptionen bestimmen ihrerseits die soziale Organisation der Lernumgebung und die Möglichkeiten zur Kooperation.

Artikulationsunterstützung ist sachgemäße Entwicklungs- und Lebenshilfe. Im Bereich der Mathematik in der Grundschule ist häufig ein weit größeres Potenzial an Wissen und Strategien zu heben, wenn man die Artikulationsmöglichkeiten angemessen erweitert. Die Unterstützungen in Situationen, die durch unzureichende Leistungen eines Kindes bestimmt sind, sollten zunächst dadurch bestimmt sein, die Artikulationsoptionen zu erweitern und dann erst durch das Zugeben unterstützender Informationen zum Gegenstand.

Insbesondere angesichts der erheblichen Probleme mit der geschriebenen und gesprochenen Sprache, die unseren Grundschulunterricht derzeit kennzeichnen, erscheint es sinnvoll, mathematisches Arbeiten mit vielfältigen Artikulationsmöglichkeiten zu starten und Artikulationen, in denen die Kinder konstruktive Resonanz zeigen, zu bewahren, bis sie darin eine gewisse Sicherheit aufgebaut haben und dann die formale schriftsprachliche Bewältigung in einem zweiten Schritt zu erarbeiten ohne dass dabei der semantische Hintergrund der Erstbearbeitung verloren geht.

Leitidee 3 Differenzieren

Lernumgebungen müssen die Möglichkeit bieten, durch Variieren von Daten und Strukturelementen auf unterschiedliche Lernvoraussetzungen von Kindern einstellbar zu sein, sie sollten *Differenzierungsräume öffnen*.

Aussteuerbare Aufgabenformate und natürliche Differenzierung. Diese Organisationselemente öffnen Differenzierungsräume bei Lernumgebungen zum Mathematikunterricht für die Grundschule: Aussteuerbare Aufgabenformate sind solche, bei denen man durch Variieren gewisser Zahlen oder Formen und gewisser Daten, die den Arbeitsaufwand und die Schwierigkeit der Aufgabe bestimmen, Angebote für alle Kinder im Feld zwischen geringen Leistungen und überdurchschnittlichen Leistungen einstellen kann. Besonders günstig ist es, wenn ein solches Variieren im eigenverantwortlichen Lernen von den Kindern selbst durchzuführen ist, in diesem Falle bietet die Lernumgebung Raum für „natürliche Differenzierung“.

Spezielle Bedarfslagen: Einschränkungen, Stärken. Zunehmend ist an Lernumgebungen die Forderung herangetragen, dass sie für Arbeitssituationen tauglich zu sein haben, in welchen die Beteiligten sehr heterogene Voraussetzungen einbringen (Hengartner 2002). Die Forderung besteht darin, eine solche Lernumgebung global wie lokal auf solche Heterogenitäten einstellen zu können.

Differenzieren in Kooperationen. Eine weitere Form der Differenzierung besteht darin, dass man die Aufgabe oder das Problem in eine kooperative Lernumgebung einbettet, die arbeitsteilig bewältigt wird, und zwar so, dass die anfallenden Teilaufgaben von unterschiedlichem Anspruch sind, das Gesamtergebnis aber für alle an der Kooperation Beteiligten als eigener Beitrag empfunden wird.

Balance der Leitideen

Das Design von Lernumgebungen nach den ersten drei Leitideen L1, L2 und L3 kann zu Entfaltungen ohne Rücksicht auf die notwendigen Aufwendungen führen. Das Aufnehmen der zweiten drei Leitideen L4, L5 und L6 betont die Ökonomie beim Design von Lernumgebungen. So steht in der *“Balanced Scorecard“* die Fraktion der „ausweitenden“ Leitideen L1, L2 und L3 der Fraktion der „eingrenzenden“ Leitideen L4, L5 und L6 ausgleichend gegenüber.

Leitidee 4 Logistik

Zunehmend bedeutsam im Schulalltag, nicht nur im Zuge der „neuen Verwaltungssteuerung“ ist das „*wirtschaftliche Steuern des eigenen Verantwortungsbereiches*“ (Harburger 2005), auch im Planen und Realisieren eines Unterrichts, der durch Lernumgebungen bestimmt ist.

Insbesondere das Einbeziehen der Leitidee Logistik soll „abgehobene“ Konzepte zu Lernumgebungen in den Bereich schulischer Machbarkeit holen. Wir beziehen logistische Planungsgesichtspunkte auf Material, Zeit und Zuwendung.

Material. Viele Lernumgebungen zum Mathematikunterricht für die Grundschule sind wesentlich durch das verwendete Material gekennzeichnet. *Investives Material* bildet einen bleibenden Bestand, *konsumentives Material* wird beim Arbeiten verbraucht. Soll eine Lernumgebung Raum zum experimentierenden Gestalten geben und dessen Ergebnisse zudem festgehalten werden, ist manches käufliche Material im nötigen Umfang unerschwinglich. Eine wesentliche Ressource bildet Material, das sich mit vertretbarem Aufwand in der Schule selbst herstellen und bleibend nutzen lässt.

Das investive Material zu einer Lernumgebung, in Form einer „Kiste“, eines Ordners, einer Software oder anderer Hilfsmittel sollte so organisiert sein, dass es der Lehrerin einen unproblematischen und von technischen Detailvorbereitungen unbelasteten Einsatz im Unterricht ermöglicht, dass es sich in der Schule leicht transportieren lässt und so nicht nur im Klassenraum, sondern auch in Lernwerkstätten, Konferenzen und Veranstaltungen außerhalb der Schule zu nutzen ist. Effizient ist dabei ein Fundus für Lehrer, in dem Materialien zu den Lernumgebungen zusammen mit dazu gewonnenen Dokumenten verfügbar sind.

Zu konsumtivem Material ist zu bedenken, dass Kinder zu dem verwendeten Material häufig eine emotionale Beziehung aufbauen. Hilfreich ist dann Material, das die Kinder sich im Wortsinn „zu Eigen“ machen können: Sie behalten Teile des Materials – nicht nur Dokumente – als Eigentum für sich und belassen andere Teile erreichbar in ihrem Klassenraum.

Mathematische Aufgabenstellungen, die im Leben des Kindes über die Unterrichtssituation hinaus keine intellektuellen oder materiellen Spuren hinterlassen, etwa im Sinne eines verbleibenden Schriftstücks oder eines verbleibenden Materials oder eines verbleibenden Produktes, zu dem ein persönlicher Bezug besteht, sind für Lernumgebungen weniger gut geeignet. Gallin und Ruf betonen in ihrer Konzeption des Lerntagebuchs gerade diese eigene Vereinnahmung des Materials durch das Kind, sein Besitzergreifen und Behalten auf besondere Art und Weise (Gallin & Ruf 1999).

Materialwerkstatt. Eine Materialwerkstatt in der Schule ermöglicht es, zumindest elementare Materialien kostengünstig herzustellen. Ein kleines Grafiklabor mit einem angemessenen Rechner, einem passend ausgelegten Drucker und einer kleinen Papierwerkstatt (Kopieren, Schneiden, Laminieren, Binden) bildet eine geeignete logistische Plattform und einen Ort für entsprechende Kooperationen. Aber auch andere Schulwerkstätten (etwa zur Holzbearbeitung) sollten bewusst in das Design von Lernumgebungen einbezogen werden.

Ein spezifisches Problem besteht darin, dass viele Lernumgebungen, speziell solche zur Geometrie in der Grundschule, „*logistisch extensiv*“ konzipiert sind. Um die empfundenen Anforderungen an sach-

liche Korrektheit, passende Artikulation und mögliche Differenzierung angemessen einzulösen, wird großer logistischer Aufwand betrieben. Wenn der Aufwand nicht zu bleibend nutzbaren Strukturen führt oder im Schulalltag nicht einzulösen ist, bleiben solche Konzepte wirkungslos und haben keine Chance zur Dissemination.

Zeit. Vorbereiten und Durchführen der Arbeit in einer Lernumgebung sind auch nach Zeitaufwand zu bewerten. Lernumgebungen, deren Implementieren viel Zeit erfordert, sollten langfristig nutzbar sein. Hier ist ein ökonomisches Umgehen mit der Ressource Zeit langfristig unumgänglich.

Im Sinne einer angemessenen Ökonomie sollten Lernumgebungen so sein, dass die Kinder im Unterricht nicht eine Unausgewogenheit an Material und Zeitaufwand zwischen den Lernumgebungen spüren, die sie unbewusst in ein unausgewogenes Gewichten der Bedeutung der betreffenden Gegenstände übertragen.

Zuwendung. Wir charakterisieren „Zuwendung“ hier nicht nach psychologischen Standards und nutzen eher ein common-sense-Verständnis zu diesem Begriff. Unter anderem sehen wir Zuwendung als eine quantitative Größe, die einem Lehrer oder einer Lehrerin als Person eigen ist. Wir glauben, dass eine Lehrperson ihre Zuwendung in einer Lerngruppe nur geringfügig durch Training steigern kann, sie kann diese Zuwendung lediglich verschieden an die Schülerinnen und Schüler verteilen. Es gilt ein Erhaltungsprinzip für den Umfang der Zuwendung. Erfordern bestimmte Schülerinnen und Schüler mehr Zuwendung als andere, so geht diese Zuwendung den anderen ab. Die Konzeption guter Lernumgebungen sollte dies kompensieren und sicherstellen, dass die Lernumgebung keine Zuwendung erfordert, die letztlich nicht aufzubringen ist, und dass die Kinder, die weniger Zuwendung erfahren, im Ausgleich dafür sachbezogen und erfolgreich kooperieren können.

Leitidee 5 Evaluation

Im ursprünglichen Ansatz vieler Entwickler zunächst nicht mitgedacht und möglicherweise durch die aktuellen Diskussionen um externe Evaluation von Unterricht belastet, ist die Option eine Lernumgebung evaluieren zu können ein wesentlicher Gesichtspunkt bei ihrer Konzeption.

Lernumgebungen sollten auf mehreren Ebenen evaluierbar sein. Diese Evaluierbarkeit sollte mit angemessenem Aufwand möglich und dennoch informativ und valide sein. Die Evaluierbarkeit von Lernumgebungen betrifft mehrere Dimensionen: Bedeutsam ist nicht nur das Evaluieren von Kompetenzen einzelner Schüler oder Gruppen, etwa im Rahmen der Qualitätssicherung, bedeutsam ist ebenso der Beitrag der Lernumgebung zum Unterrichtserfolg insgesamt, also eine Evaluation als Beitrag zur Qualitätssicherung des Unterrichts und der Schulentwicklung.

Das Evaluieren im Mathematikunterricht sollte über einen traditionellen ergebnisorientierten Leistungsbefund bei den einzelnen Schülerinnen und Schülern deutlich hinausgehen. Wir teilen hier die Positionen von Selter zur *informativen Leistungsfeststellung* (Selter 2000), von Doug Clarke zum *„Linking Assessment and Teaching“* (Doug Clarke 1999) und bündeln diese im Konzept der *„handlungsleitenden Diagnostik“* (Wollring 2005).

Demnach geht das Evaluieren der Schülerbeiträge im Mathematikunterricht der Grundschule weit über die Unterscheidung von „*richtig versus falsch*“ hinaus. Die auf das Ergebnis bezogene Evaluation ist zu ergänzen durch Evaluationen, die sich auf die Strategie beziehen. Dazu sollte die Lernumgebung *Strategiedokumente* zulassen, einfordern und unterstützen. Sie ist ferner zu ergänzen durch eine Evaluation, die den *spezifischen Unterstützungsbedarf* des Kindes beschreibt, d. h. die Lernumgebung sollte in ihren Dokumenten Ansätze für Förderimpulse bieten.

Zu evaluieren ist zudem das, was an der jeweiligen Schülerleistung *aner kennenswert* ist, also die Teile, die sich dazu nutzen lassen, das Selbstkonzept des Kindes zu stärken. Und zu evaluieren ist, was an der jeweiligen Leistung über die Einzelarbeit hinaus *nutzbar* ist, also das, was sich eignet, um in eine gemeinsame Arbeit oder in Meta-Aufgaben eingebracht zu werden, kurzum, was zum sozialen Lernen beiträgt.

Insgesamt also sollte die Evaluation nicht nur Befunde über den Lernstand der Kinder erheben, sondern auch das rekursive Optimieren der Lernumgebung insgesamt unterstützen.

Leitidee 6 Vernetzung mit anderen Lernumgebungen

Diese Vernetzung erfolgt auf verschiedenen Ebenen. Winter spricht in diesem Zusammenhang von „Beziehungsreichtum“.

Lernumgebungen stehen nicht isoliert im Mathematikunterricht der Grundschule. So sind sie in der Regel schwerpunktmäßig einem bestimmten mathematischen Gegenstand gewidmet. Häufig aber stehen sie im Sinne einer beziehungshaltigen Mathematik auch im Kontakt mit mehreren verschiedenen mathematischen Gegenständen, Darstellungsformen oder Argumentationsmustern. Beziehungen zu anderen Strategien im selben mathematischen Problemfeld kennzeichnen eine Lernumgebung im engeren Sinne.

Ein weiteres Beziehungsfeld beschreibt die Beziehungen zu anderen Bereichen im Mathematikunterricht. Diese wiederum werden umfasst durch die Beziehungen zu anderen Fächern in der Grundschule, zu Sprachen, Sachunterricht, Religion, Sport, Kunst und Musik. Und diese wiederum werden umschlossen von den Beziehungen der Lernumgebung zur außerschulischen Lebenswelt.

Situative und materielle Lernumgebungen

In diesem Sinne beschreibt der Terminus Lernumgebung sowohl eine Arbeitssituation in der Schule mit all ihren gegenständlichen, sozialen und technischen Bedingtheiten, soweit sie durch eine Planung zu beeinflussen sind. Eine Lernumgebung in diesem Sinne bezeichnen wir als *situative Lernumgebung*.

Der Terminus Lernumgebung beschreibt aber auch sämtliche Vorbereitungselemente, zusammengefasst etwa in einer „Kiste“ mit geeignet vorbereitetem Material, bestehend aus Aufgabenstellungen, Experimentiermaterial, Eigenproduktionen, Software und Hardware und Verbrauchsmaterial. In die-

sem zweiten Sinne sind Lernumgebungen typische materielle Bestandteile von Lernwerkstätten an Schulen oder Universitäten. Sie sollen den Lehrenden ermöglichen, die entsprechende situative Lernumgebung im Unterricht einzurichten. Eine Lernumgebung in diesem Sinne bezeichnen wir als *materielle Lernumgebung*.

Der Begriff der materiellen Lernumgebung beschreibt somit das Dokumentierbare, Übertragbare oder Übernehmbare einer Lernumgebung, gewissermaßen das, was als Planungskonsens und Erfahrungskonsens aus verschiedenen situativen Lernumgebungen verbleibt. Der Begriff ist verwandt mit dem der *Unterrichtseinheit*, wie Wittmann sie versteht und dem Begriff der *didaktischen Einheit*, wie etwa Ben-Chaim sie beschreibt.

Aneignung von Lernumgebungen durch Eigenproduktionen

Eine systematische Diskussion von „Eigenproduktionen“ im Mathematikunterricht der Grundschule besteht etwa seit 1983 (Treffers 1983, Selzer 1993), wenngleich es auch wesentlich früher Beiträge gab, die man heute darunter subsumieren kann, etwa von Oehl und von Kerschensteiner. Gemeint sind Dokumente zu Ergebnissen, Vorgehensweisen, Strategien von Kindern beim Bearbeiten von Problemen, sowohl vor formeller Unterweisung als auch daran anschließend.

Vier Funktionen kommen den Eigenproduktionen im vorliegenden Kontext zu:

- **E1.** Sie sind für Lehrerinnen und Lehrer *authentische Erfahrungen* und ein *Ausgangspunkt zum Planen* von Unterricht.
- **E2.** Sie dienen Lehrerinnen und Lehrern im Rahmen *handlungsleitender Diagnostik* zur *Konzeption spezifischer Unterstützungen* von Schülerinnen und Schülern. Dies umfasst Differenzieren, Förderimpulse und besondere Herausforderungen.
- **E3.** Sie bilden die *Substanz für Meta-Aufgaben*, deren Konzept darin besteht, dass Lernende beim Bearbeiten eines Problems Teilleistungen oder vollständige Bearbeitungen von anderen positiv würdigend in ihren Arbeitsprozess einbeziehen und darauf Bezug nehmen.
- **E4.** Sie dienen der sukzessiven *Aneignung von Lernumgebungen* dadurch, dass die der Lernumgebung ursprünglich beigegebenen „fremden Eigenproduktionen“ zunehmend angereichert oder ersetzt werden durch Eigenproduktionen, welche die Lehrerin oder der Lehrer im eigenen Unterrichten gehoben hat. So ändert sich die Lernumgebung, man macht sie sich damit im Sinne des Wortes „zu eigen“. Wirkt dieser Aneignungsprozess auf die Struktur der Lernumgebung ein und ändert sie, in der Regel zu höherer Wirksamkeit, so bezeichnen wir diesen Prozess als *„rekursives Design von Lernumgebungen“*.

In materiellen Lernumgebungen besitzt demnach das „Material“ nicht nur programmatische Funktionen dahingehend, dass es für bestimmte Aktivitäten oder Versuche den Rohstoff oder den Ausgangspunkt bildet. Vielmehr sollte eine materielle Lernumgebung in ihrer Verwendungsgeschichte in der Lehrerbildung und an der Schule zunehmend angereichert werden durch Eigenproduktionen, die von

den jeweils Lernenden, Studierenden oder Schülern, in den entsprechenden situativen Lernumgebungen hervorgebracht wurden.

Eigenproduktionen haben zunehmend Eingang in die universitäre und außeruniversitäre Lehrerbildung gefunden. Im Sinne kleiner Fallstudien sollen sie Lehrerinnen und Lehrer analytisch sensibilisieren, eigene Denkwege von Kindern wahrzunehmen, zu würdigen und als intellektuelle Bausteine in ihren Unterricht einzubeziehen. Darüber hinaus sollen Eigenproduktionen den Blick dafür schärfen, dass in der Mathematik die Strategie beim Bewältigen einer Aufgabe mindestens so bedeutsam ist wie ein korrektes Ergebnis und dass Kinder für ihre selbst entwickelten Strategien Artikulationsformen suchen. Sie sollen ferner Anregung geben, in den besonderen Eigenproduktionen, die ihnen im Laufe ihrer Ausbildung begegnen, das Allgemeine zu sehen und dies dadurch zu erfahren, dass sie in ihren eigenen Arbeitssituationen entsprechende Eigenproduktionen erheben, die dann die ihren sind und ihren weiteren Entscheidungen zugrunde gelegt werden.

Eigenproduktionen erfüllen darüber hinaus die Funktion, eine bestimmte Unterrichtskultur des Würdigens und des Anerkennens im sozialen Lernen zu unterstützen, und dies gerade und besonders im Fach Mathematik. Denn gerade dieses Fach ist im Unterricht der Grundschule dadurch belastet, dass viele Beteiligte, Lehrerinnen, Eltern und Schüler, die Eindeutigkeit und Richtigkeit der Ergebnisse mathematischer Aufgaben verwechseln mit der Eindeutigkeit und Festgelegtheit der Wege und Strategien, die zu den Lösungen dieser Aufgaben führen. Das Würdigen vielfältiger und individueller Strategien gelingt aber nur dann, wenn diese zwischen den Lernenden korrespondierbar werden und wenn es neben den Aufgaben, die darin bestehen, Lösungswege und Lösungen hervorzubringen, auch solche Aufgaben gibt, die darin bestehen, sich mit den Lösungsansätzen, Lösungswegen und Lösungen von anderen konstruktiv auseinander zu setzen. Genau dies ist die Sinnggebung von Meta-Aufgaben. Meta-Aufgaben aber erfordern eine differenziertere Substanz zur Bearbeitung, die kaum in einem konstruierenden Planungsprozess herzustellen ist, sondern vielmehr durch langfristiges Sammeln und analysierendes Aufarbeiten von Eigenproduktionen entsteht.

Eigenproduktionen dokumentieren, über längere Zeit gesammelt, die Geschichte der Verwendung einer Lernumgebung.

Rekursives Design von Lernumgebungen

Die wesentliche Funktion von Eigenproduktionen E4, die alle anderen in sich aufnimmt, ist das durch sie bestimmte „*rekursive Design von Lernumgebungen*“.

Es besteht in der fortschreitenden Optimierung der materiellen Lernumgebung, in der implizit gewonnenen diagnostischen Kompetenz und schließlich in der Bereicherung des Lernklimas durch Lerndokumente und dem von ihnen ausgehenden Anerkennungsanspruch. Basis dazu ist das systematische Dokumentieren von Eigenproduktionen in der Verwendungsgeschichte der Lernumgebung.



Desiderata

Der Begriff *Lernumgebung* ist auf dem Weg zu einem bildungspolitischen Terminus, nicht nur in der Didaktik der Mathematik. Er hat einen intentionalen Impuls und soll das Aufarbeiten aktueller Desiderata zum Unterricht unterstützen. Fünf solche Desiderata seien benannt:

- *Unterrichtskultur 1.* Eigenverantwortliches und selbstorganisiertes Lernen der Lernenden im Mathematikunterricht stärken.
- *Unterrichtskultur 2.* Lernen mit fachbezogener Korrespondenz unterstützen.
- *Fachdidaktik 1.* Fachdidaktik als Entwicklungsforschung herausfordern.
- *Fachdidaktik 2.* Fachdidaktik in der Forschung zur Diagnostik stärken und Konzepte diagnostischer Kompetenz für Lehrerinnen entwickeln.
- *Mathematikunterricht intern.* Neue Impulse dazu geben Geometrie in der Grundschule als integralen Teil der Mathematik zu betrachten.

Schlussperspektive

Lernumgebungen sehen wir als ein Planungs- und Organisationskonzept, mit dem konstruktivistisch orientiertes Lernen und ein damit verbundenes positives Lernklima zu realisieren sind.

Lernumgebungen bilden somit sinnvolle Organisationseinheiten in der Lehrerbildung.

Es kann nicht darum gehen, den Kindern das Aufbringen aller sachlichen Informationen selbst zu überlassen und sie mit dem so entstandenen oft unzureichenden Wissensbestand aus den Lernumgebungen zu entlassen. Vielmehr geht es darum, das eigene Gestalten, das Neu-Erfinden und das Wieder-

Erfinden soweit einzubeziehen, dass die Kinder *das Erarbeitete als ihr Eigenes ansehen* und auf dieser Basis bereit sind, ergänzende Information und allgemein akzeptierte Konventionen anzunehmen, ohne dass dieses Eigene verloren geht.

Quellen

- Artigue, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (1991). *Didactic engineering. Research and Development Tool: Some Theoretical Problems Linked to this Duality*. For the Learning of Mathematics 11(1991), 5-29.
- Becker, J.P., & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach. A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM 1997.
- Clarke, Dg. (1999). *Linking Assessment and Teaching: Building on What Children Know and Can Do*. Melbourne: Proceedings of the 1999 Early Years of Schooling P-4 Conference, 12-16
- Gallin, P., & Ruf, U. (1999). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*. Band 1: *Austausch unter Ungleichheiten*. Band 2: *Spuren legen – Spuren lesen*. Seelze: Kallmeyer 1999
- Harburger (2005). Terminus zitiert nach mündlicher Mitteilung von H. Storch, Hessisches Kultusministerium
- Hengartner, E. (1999) (Hrsg.). *Wie Kinder lernen. Standorte und Denkwege*. Zug: Klett & Balmer 1999.
- Hengartner, E. (2002). *Mathe-Projekt. Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Internet-Quelle (2002): <http://www.mathe-projekt.ch>
- Hessisches Kultusministerium (2006): *Aufgaben und Auswertung der Orientierungsarbeiten für den dritten Schuljahrgang der hessischen Grundschulen im Schuljahr 2005/06*
- KMK (2004): *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards zum Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4), Beschluss vom 15.10.2004*. Luchterhand
- Leutner, D., Leopold, C., & Wirth, J. (2004). Selbstreguliertes Lernen – Förderung des Selbstregulierten Lernens als fachübergreifende Kompetenz. In: K. Klemm (Hrsg.) (2004). *Bildungsforschung nach PISA*. (S. 46-55) Universität Duisburg-Essen: Bildungswissenschaften 24. Essener Unikate. Berichte aus Forschung und Lehre.
- Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache – Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Unterricht*. In: Reichel, H. Ch. (Hrsg.), *Mathematik für Schule und Praxis*. Band 4. Wien: öbv & hpt Verlagsgesellschaft.
- Prengel, A. (2004). Anerkennung in der integrativen Grundschulpädagogik: Egalität, Heterogenität und Hierarchie. In: A. Hinz und U. Geiling, *Integrationspädagogik im Diskurs*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
- Selter, Ch. (1993). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe: Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr*. Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag GmbH. 1993
- Selter, Ch. (2000). *Informative Aufgaben zur Leistungsfeststellung*. Grundschulzeitschrift 135/136 (2000), 26-29.
- Spindeler, B. (2006): mündliche Mitteilung zur doppelten Heftführung.
- Treffers, A. (1983). *Fortschreitende Schematisierung. Ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr*. Mathematik lehren, Heft 1, 30-34 und 39
- Winter, H. (1989). *Entdeckendes Lernen. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für den Unterricht*. Braunschweig und Wiesbaden: Vieweg 1989.

- Wittmann, E. Ch. (1982). *Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik*. Journal für Mathematikdidaktik 3(1982), 3-20.
- Wittmann, E. Ch. (1992). *Mathematikdidaktik als ‚design science‘*. Journal für Mathematikdidaktik 13(1992), 55-70.
- Wittmann, E. Ch. (1997). *Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen als gesellschaftlicher Auftrag*. Schulverwaltung 5/1997, 133-136
- Wittmann, E. Ch. (1998). Mathematics Education as a ‚Design Science‘. In: A. Sierpiska and J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study*. Boston and Dordrecht: Kluwer 1998, Book 1, 87-103.
- Wittmann, E. Ch. (2000). *Developing Mathematics Education in a Systemic Process*. Plenary Lecture at ICME 9, Makuhari, Japan 2000.
- Wollring, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Ch. Selter, & G. Walther, *Mathematikdidaktik als design science*. (S. 270-276). Stuttgart: Klett Verlag.
- Wollring, B. (2003). „Mit den Kindern Geometrie neu entdecken“ - Kooperatives Design der Arbeitsumgebung „Streifenschablonen“ für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In M. Baum und H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule - Ein Arbeitsbuch*. (S. 147-176) Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.
- Wollring, B. (2004). Kooperative Aufgabenformate und Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule. In: H. Dauber (Hrsg.), *Gestalten – Entdecken. Lernumgebungen für selbständiges und kooperatives Lernen*. (S. 14-21) Kassel: Zentrum für Lehrerbildung der Universität Kassel. Reihe Studium und Forschung.
- Wollring, B. (2005). *Handlungsleitende Diagnostik für den Mathematikunterricht der Grundschule*. In: Friedrich Jahresheft 2005 zum Thema „Diagnostik“

Prof. Dr. Bernd Wollring
Fachbereich 17 Mathematik, Universität Kassel
Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel
wollring@mathematik.uni-kassel.de