Bernd Wollring, Fachbereich Mathematik, Universität Kassel, Deutschland

Würfelnetze finden und ordnen – Design von Lernumgebungen zur Geometrie für die Grundschule

Handout für Teilnehmende am Workshop „Handlungsorientierte und kommunikative Lernumgebungen zur Geometrie am Beispiel von Würfelnetzen, passend für die Jahrgangsstufen 2, 3, 4 und andere“ im Rahmen der Herbsttagung des SINUS-Transfer Grundschulprojektes im September 2007 in Erkner

1 Grundpositionen

Vorab markieren wir Grundpositionen, die das folgende Design bestimmen.

Wir vertreten für den Mathematikunterricht die *konstruktivistische Grundposition*: Die Schüler lernen aktiv entdeckend und im sozialen Austausch, und Lehrer nehmen ihre Aufgabe darin wahr, die Schüler als autonome aktiv Lernende zu unterstützen und ihr Lernen effizient zu moderieren. Dies schließt ein, dass Lehrer über das Potenzial der Lernenden in der spezifischen Lernumgebung Erfahrungen haben, um einschätzen zu können, was in einer bestimmten Arbeitssituation von den Lernenden als eigener Beitrag zu erwarten ist und wozu sie Unterstützung benötigen.

Das positive Komplement zur konstruktivistischen Grundposition sehen wir in der *informativen Grundposition*: Lehrer haben den notwendigen Überblick über die Vielfalt der zu dieser Aufgabe gehörenden möglichen Ergebnisse und Strategien, so dass sie die Aktivitäten der Lernenden durch geeignete passend dosierte Impulse unterstützen können und den Lernenden eine zureichende Quelle für verlässliche mathematische Informationen sind.

Beide Positionen fließen zusammen in einer *Anerkennungskultur* (Prengel 2004): Lehrer sind imstande Teilleistungen der Lernenden, noch nicht vollständige Lösungen oder erst teilweise entwickelte Strategieansätze positiv wertend in die allgemeine Arbeit an einem Problemkreis aufzunehmen. Wesentliches Element in einem Klassenklima der Anerkennungskultur ist die positiv wertende und *kompetenzorientierte Sicht* auf die Beiträge der Lernenden im Gegensatz zu einer defizitorientierten Sicht, die eher betont, was an dem Beitrag eines Lernenden zum Vollständigen und zum Richtigen noch fehlt.

2 Design: Lernumgebungen und Leitideen

Diese Positionen realisieren wir mit dem Designkonzept der Lernumgebungen (Wittmann 1992, Gallin & Ruf 1999, Hengartner 2002). Eine Lernumgebung im Mathematikunterricht ist eine Erweiterung dessen, was traditionell eine Aufgabe ausmacht oder ein flexibles Aufgabenformat. Sie besteht aus einem Netzwerk kleinerer Aufgaben, die durch Leitideen strukturiert und gebunden werden. Wir unterscheiden zur Charakterisierung von Lernumgebungen sechs Leitideen (Wollring 2007):

- ***L1*** *Mathematischer Sinn und Werksinn*
- ***L2*** *Artikulation und soziale Organisation*
- ***L3*** *Differenzierung*
- ***L4*** *Logistik*
- ***L5*** *Evaluierbarkeit*
- ***L6*** *Vernetzung mit anderen Lernumgebungen*

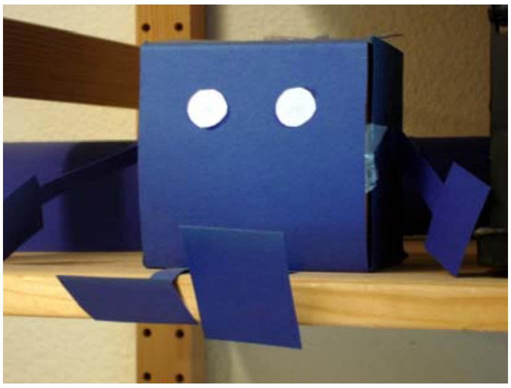
Im Abschnitt 3.6 weiter hinten im Text diskutieren wir die Passung der folgend entworfenen Lernumgebung mit diesen Leitideen.

3 Lernumgebung „Würfelnetze“

Anstatt diese Punkte im Einzelnen abstrakt zu erläutern, entwerfen wir im Folgenden pars pro toto die Lernumgebung *„Würfelnetze finden und ordnen“*, wie wir sie im Mathematikunterricht der Grundschule für eine Jahrgangsstufe 2, 3 und 4 in Unterrichtsexperimenten untersucht haben und vorschlagen, berichten simultan dazu über einige Erfahrungen aus dem Lehrertraining und beschreiben abschließend, in wie weit darin die genannten Leitideen realisiert sind.

3.1 Lernumgebung „Würfelnetze“: Vorbereitende Überlegungen

Was ein Würfelnetz ist, klären wir hier durch einen Einstieg mit einer personalisierten Metonymie, die wir M. Hejny verdanken: Ein Würfelnetz ist ein „Schnittmuster zu einem Anzug für einen Würfel“ aus Quadraten, das entlang einiger Seiten noch zusammenzufügen ist. Nach der einleitenden Klärung entsteht die Frage, ob die Lernenden gegebene Würfelnetze analysieren, oder ob sie gemeinsam Würfelnetze herstellen. Entscheidet man sich für das zweite, so entsteht die Frage, wie man solche Netze herstellt und wie man prüft, ob es Würfelnetze sind.




Bilder 1.1 und 1.2: „Mr. Kubus“ und sein Anzug

Wir haben uns entschieden, die Würfelnetze aktiv-konstruierend von den Lernenden herstellen zu lassen.

Für diesen Herstellungsprozess werden häufig Vorschläge unterbreitet, die auf ein kombinatorisch begründetes Arrangieren der Quadrate in der Ebene hinauslaufen und die das Verräumlichen der so entstehenden Netze nur auf mentaler Ebene einfordern. Dieser Ansatz kann unnötige Einstiegsschwierigkeiten mit sich bringen.

Wir entscheiden uns für einen Weg, bei dem eine konkrete Aktivität darin besteht, die als Netze vorgeschlagenen Figuren um einen Würfel probeweise herumzuwickeln sind, um so experimentell zu prüfen, ob tatsächlich ein Würfelnetz vorliegt, und wenn nicht, wie man die Figur möglicherweise korrigieren kann.

Bei diesem Ansatz entsteht das Problem, ob man die „Netzfiguren“, wie wir die von den Lernenden erstellten Figuren provisorisch nennen, als Ganzes zeichnend herstellt oder aus Teilen zusammensetzt. Beide Wege haben für das Konzipieren einer Lernumgebung zu Würfelnetzen Vorteile und Nachteile.

Das Konstruieren der Netze aus quadratischen Stücken führt auf lösbare, aber nicht einfache logistische Probleme. Zu entscheiden ist, wie groß die Quadrate sein sollen, aus welchem Material sie bestehen, wie man sie verbindet und wie viele man braucht. Betrachten wir eine Klasse mit 20 Lernenden, die in Gruppen zu je 4 Personen zusammen arbeiten. Jede dieser fünf Gruppen soll alle Würfelnetze finden. Wenn niemand einen Fehlversuch macht und die Lernenden sich optimal abstimmen, dann werden für diesen Ansatz 5 x 6 x 11 = 330 Quadrate benötigt. Rechnet man einige Fehlversuche und doppelt erstellte Netze ein, dann sind 400 Quadrate eine realistische Zahl. Geht man allerdings davon aus, dass die Lernenden zueinander achsensymmetrische Netze im ersten Ansatz nicht identifizieren, so benötigt man erheblich mehr Quadrate, für die genannte Klasse mindestens 600. (Die muss man erst einmal gekauft oder hergestellt haben.) Nach dieser Abschätzung scheidet für uns konfektioniertes käufliches Material aus finanziellen Gründen weitestgehend aus. Werden die Quadrate aus einem flächigen Material hergestellt, dann erscheint es sinnvoll, sie mit Stücken aus Klebefilm zu verbinden, denn diese Verbindung ist einerseits gelenkig und andererseits wieder lösbar. Das aber erfordert entweder einen beschichteten Karton oder ein geeignetes Plastikmaterial für die Quadrate. Wir haben in einem ersten Unterrichtsexperiment die zweite Variante gewählt und dazu 600 Plastikquadrate aus einer sehr robusten farbigen Plastikfolie geschnitten, die etwa so dünn ist wie Papier, aber sehr stabile Quadrate ergibt. Würfel der Kantenlänge 5 cm erfordern Netze aus Quadraten mit 5 cm Seitenlänge. Diese Netze werden recht groß, und 11 oder mehr davon füllen den Arbeitstisch einer Gruppe ziemlich aus.

Also finden wir kleinere Würfel zweckmäßig. Die Firma LPE, die Material für den naturwissenschaftlichen Unterricht herstellt, offeriert Plastikwürfel mit der Kantenlänge 2 cm. Die lassen sich zudem mit Zapfen zu Bauwerken zusammensetzen. Wir wählen für das Arbeiten in der Grundschule diese Würfel (siehe Bild 2).

Die dazu passenden Netze mit Quadraten der Seitenlänge 2 cm lassen wir von den Lernenden auf „Kästchenpapier“ zeichnen. Solches Papier mit 5mm-Quadrat-Kästchen ist bei uns allgemein üblich und überall zu beschaffen.

3.2 Lernumgebung „Würfelnetze“: Netze finden und Würfel einwickeln

Die gezeichneten Netzfiguren werden ausgeschnitten, an den Quadraträndern geknickt und zum Überprüfen um den Würfel gewickelt. Dieses Verräumlichen und Einwickeln halten wir für eine zentrale Aktivität. Sie unterstützt das Erlernen der Beziehung zwischen der ebenen Gestalt und der Gestalt im Raum. In unseren Unterrichtsexperimenten hat jeder Lernende im Zeitraum von einer guten Stunde durchschnittlich etwa 10 solcher Netzfiguren gezeichnet, ausgeschnitten, geknickt, um den Würfel gewickelt und daraufhin geprüft, ob ein Würfelnetz vorliegt oder nicht.

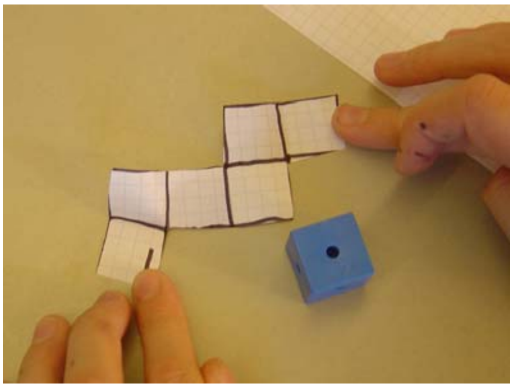


Bild 2: 2cm-Würfel und gezeichnetes Netz dazu

3.3 Lernumgebung „Würfelnetze“: Netze ordnen und Kongruenzkonzept finden

Die entscheidende weiterführende Aktivität besteht nun im Sortieren und Ordnen der gefundenen Netzfiguren. Dabei zeigt sich, dass diese Lernumgebung nicht nur einen Schwerpunkt in der Raumgeometrie hat - den Zusammenhang zwischen den ebenen Netzen und dem räumlichen Körper -, sondern dass sie auch auf natürliche Weise Symmetrieabbildungen und Kongruenzabbildungen betrifft, denn diese Abbildungen spielen in den Handlungen und Argumenten eine Rolle, mit denen die Lernende die verschiedenen Sorten der Würfelnetze finden und beschreiben.

Wir fanden in Unterrichtsversuchen, dass Lernende zwei Würfelnetze als identisch ansehen, wenn sie diese aufeinander legen können. Dies ist ein intuitiver Zugang zum Begriff der Kongruenz, genau diesen Zugang kennzeichnet das Wort „Kongruenz“. Nun ist es leicht, zwei Würfelnetze als gleich anzusehen, wenn man sie aufeinander schieben kann. Eine höhere Kompetenz ist erreicht, wenn jemand zwei Würfelnetze als gleich ansieht, nachdem er eines davon „umgedreht“ hat, „gewendet“ hat, und dieses dann auf das andere legen kann.

Aus der Perspektive der Mathematik ist festzuhalten, dass in den Handlungen der Lernenden beim Sortieren der Würfelnetze genau die Kongruenzabbildungen der Ebene in sich auftreten, die Verschiebung, die Drehung und die Spiegelung. Wie man in der Geometrie beweist, lassen sich sämtliche

Kongruenzabbildungen der Ebene in sich aus diesen Abbildungen zusammensetzen. Insbesondere kann man beweisen, dass man allein aus den Spiegelungen alle Kongruenzabbildungen der Ebene in sich zusammensetzen kann. Dieser Sachverhalt wird von den Lernenden in ihren Sortierhandlungen vollzogen, ohne dass sie ihn formal durchdringen: *„Theorem in Action“*.

Lässt man zunächst nur das Verschieben und Drehen im Sinne eines „Bewegens ohne Umdrehen“ beim Sortieren der Netze zu, so findet man 20 verschiedene Netze, denn die zueinander achsensymmetrischen werden dabei als verschieden gezählt. Nur die zwei achsensymmetrischen Netze, das „Kreuz“ und das „T“, treten jeweils nur einmal auf. Identifiziert man die zueinander achsensymmetrischen Netze, so reduziert sich die Zahl der verschiedenen Netze auf 11.

Für das Anordnen und Konstruieren der Netze entwickeln die Lernenden sehr verschiedene Strategien und Ordnungssysteme. Es ist daher sinnvoll, ein Darstellungssystem zu finden, in dem Lernende ihre persönlich gefundenen Netze und deren Anordnungen auch dann äußern können, wenn ihnen dazu noch keine Fachsprache zur Verfügung steht. Solange nur die Umgangssprache verfügbar ist, muss die Korrespondenz der Lernenden untereinander durch Handlungen, Zeigen, Hinweisen und Manipulieren unterstützt werden. Und die Protokollform muss im gewissen Sinne „demokratisch“ sein: Sie sollte den Entscheidungsprozessen einer Gruppe flexibel folgen können und dabei oder danach das Herausbilden der Fachsprache unterstützen.

Eine solche Protokollform sehen wir in den Mind Maps, die wir für solche Klassifizierungsprozesse in der Grundschule geradezu für ideal halten. Was ist eine Mind Map?

3.4 Mind Maps

Grob skizziert ist eine Mind Map eine Art Plakat oder Poster, auf dem Bilder oder geschriebene Begriffe irgendwo platziert sind. Das Besondere dabei ist, dass stärkere oder schwächere Beziehungen zwischen den Begriffen oder Bildern dadurch ausgedrückt werden, dass diese Bilder mehr oder weniger nahe beieinander arrangiert sind. Genauer: Eine Mind Map ist eine Fläche, auf der sich Darstellungen von Begriffen - Texte, Bilder oder Symbole - so arrangiert befinden, dass

- die aktuelle Lage dieser Darstellungen etwas über die Beziehungen der Begriffe zueinander aussagt und
- die aktuelle Lage dieser Darstellungen flexibel handhabbar und bequem zu verändern ist, so lange, bis eine gefunden ist, die nach Meinung derjenigen, die die Mind Map herstellen, die Beziehungen am besten darstellt.

Die folgenden Bilder 5 bis 8 zeigen Mind Maps. In der diagnostischen mathematikdidaktischen Forschung spielen Mind Maps eine bedeutende Rolle. Sie sind aber auch ein sehr wirksames Werkzeug im Unterricht. Speziell in der hier vorgestellten Lernumgebung sind sie äußerst effizient zu nutzen, denn sie bilden eine Darstellungsform, die komplexe geometrische Tatbestände verdeutlichen kann, zu denen es für Lernende in der Grundschule zu umständlich und zu schwierig wäre, als Protokoll ihrer Aktivitäten einen ausführlichen Text zu schreiben (vgl. Wollring 2003, 2006).

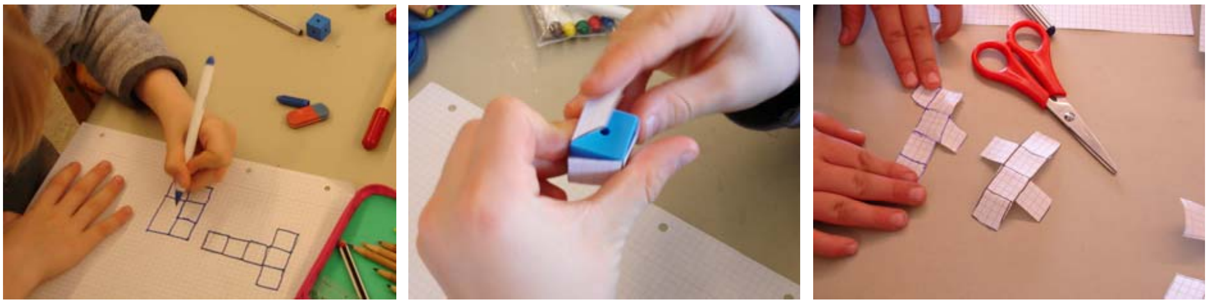
Mind Maps konstituieren eine funktionale Sprache, die Lernende in der gemeinsamen Arbeit sehr schnell verstehen und erlernen. So lange die gesamte Mind Map noch nicht fixiert ist, sondern durch Verschieben der Darstellungen Änderungen zulässt, sind zudem „Fehler“ oder aufgegebene Positionen leicht zu korrigieren und Diskussionsprozesse und ihre Zwischenergebnisse leicht darzustellen (vgl. Wollring 2002, 2006). Die Mind Map ist also eine für die Arbeit in Gruppen wie für die Einzelarbeit geeignete Darstellungsform. Beides haben wir in unseren Experimenten ausgenutzt.

3.5 Lernumgebung „Würfelnetze“: Aktivitäten

Sowohl Lehrer als auch Grundschüler haben in unseren Versuchen Netze zu 2-cm-Würfeln auf Kästchenpapier gezeichnet und ausgeschnitten. Die Schüler hatten zudem die Möglichkeit, die Netzfiguren durch Einwickeln der 2-cm-Würfel auf ihre Korrektheit zu prüfen. Sowohl die Lehrer als auch die Schüler haben stets zu je vier Personen an einem Gruppentisch gearbeitet. Wir beschreiben eine Serie von Aktivitäten für das anschließende systematische Darstellen der gefundenen Würfelnetze.

Aktivität 1: Netze testen und vergleichen

Die ausgeschnittenen Netze werden auf dem Tisch in Stapeln gesammelt. Dabei wird ein Netz mit bereits liegenden Netzen verglichen oder es wird als Beginn eines neuen Stapels hingelegt. Die Netze werden „auf Sicht“ miteinander verglichen oder durch direktes Aufeinanderlegen.



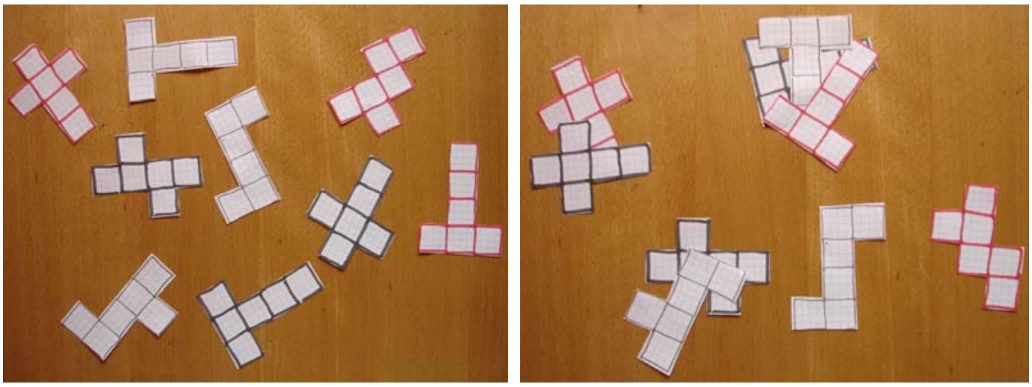
Bilder 3.1, 3.2 und 3.3: Netze zeichnen, Netze testen und Netze vergleichen

In allen unseren Arbeitsgruppen kam die Frage auf, ob man ein Netz für diesen Vergleich umdrehen darf oder nicht. Wenn ja, so entstanden weniger Stapel. Wenn nein, so ergaben sich mehr. Die Stapel wurden auf dem Tisch zunächst irgendwo gesammelt. Das Stapeln der einzelnen Netze ist die erste Stufe des systematischen Ordnens, und die Sammlung der Stapel auf dem Tisch bildet bereits die Vorform einer Mind Map.

Aktivität 2: Netze stapeln und Stapel arrangieren

Der Akzent der Aktivität 1 liegt zunächst darauf, als gleich angesehene Netze überhaupt zusammenzufassen. Gelegentlich aber waren Netze des gleichen Typs in zwei oder mehreren Stapeln abgelegt. Als die Lernenden dies bemerkten, wurden die Stapel neu zusammengefasst. Dabei ergab sich der Bedarf, eine Übersicht über die Stapel zu gewinnen.

Wie von selbst führte dies in einigen Gruppen dazu, dass nun die Stapel ihrerseits auf eine Art arrangiert wurden, die diesen Überblick erleichterten. Dabei wurde intuitiv die Struktur der Mind Map herangezogen. Näher beieinander liegende Stapel zeigten Netze, die aus der Sicht der Lernenden in ihrer Struktur einander ähnlicher waren als solche, die weiter voneinander entfernt lagen. An allen Gruppentischen wurde so eine minimale Anzahl von Stapeln gefunden. Allerdings wiesen diese Stapel teilweise noch Figuren auf, die keine Würfelnetze waren, und teilweise fehlten bestimmte Würfelnetze in den Stapelserien. Einige Gruppen versuchten, dies zu korrigieren, indem sie nachschauten, welche Stapel bei den benachbarten Gruppen auftraten.



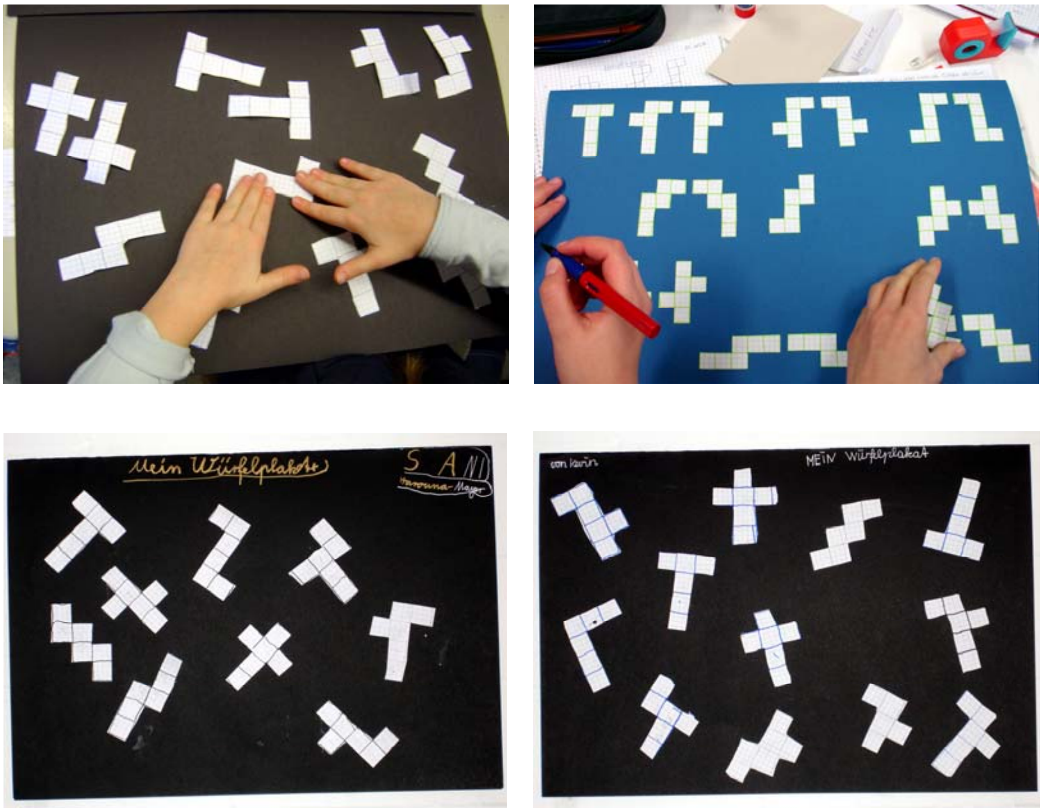
Bilder 4.1 und 4.2: Stapel von Würfelnetzen

Aktivität 3: Netze auf Poster zu einer Mind Map arrangieren

Die Gruppen erhalten die Aufgabe, aus jedem Stapel eine Netzfigur als Repräsentanten zu nehmen und diese auf einem Poster der Größe 50 cm x 70 cm zu arrangieren. Gefragt war zudem, dieses Arrangement so anzulegen, dass man daran sehen kann, „ob dies alle Würfelnetze sind oder nicht“.

Die Aufgabe, Netze von ähnlicher Struktur näher beieinander zu arrangieren, haben wir nicht explizit gestellt. Vielmehr interessierte uns, welche Arrangements die verschiedenen Gruppen von sich aus wählen. Implizit war gefragt, welche Struktur die Gruppen ihrem Poster geben würden, denn vorgesehen war, die Poster der verschiedenen Gruppen später vergleichend zu diskutieren.

Die Poster sollten erst dann durch Kleben fixiert werden, wenn die gesamte Gruppe mit dem Arrangement einverstanden ist. So entstanden ganz verschiedene Poster. Wie oben erwähnt, erscheint uns die Option, die Poster so lange wie möglich flexibel zu halten, sehr entscheidend. Poster, die sich noch verändern lassen, nennen wir *„Flex-Poster“*. In diesem Zusammenhang ist ein technisches Detail vielleicht nicht ganz unbedeutend: Ist der Kleber nicht lösbar, dann darf man als Moderator das Fixieren des Posters erst ganz am Ende des Diskussionsprozesses zulassen, am besten, indem man den Lernenden den Kleber überhaupt erst dann gibt. Oder man arbeitet mit einem lösbaren Klebern (kleine Klebekissen), die Änderungen jederzeit erlauben.



Bilder 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4: Mind Maps mit Würfelnetzen

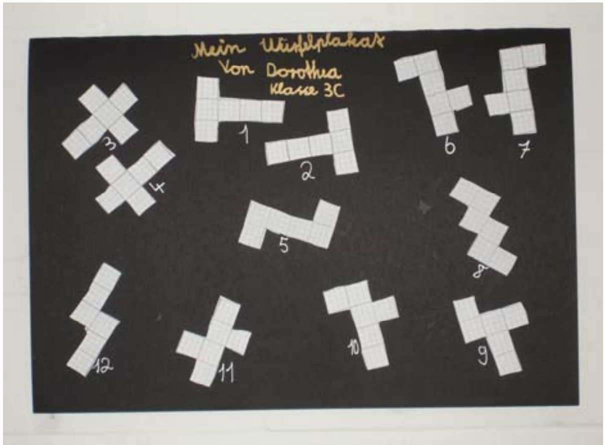
Aktivität 4: Den Netzen Namen geben

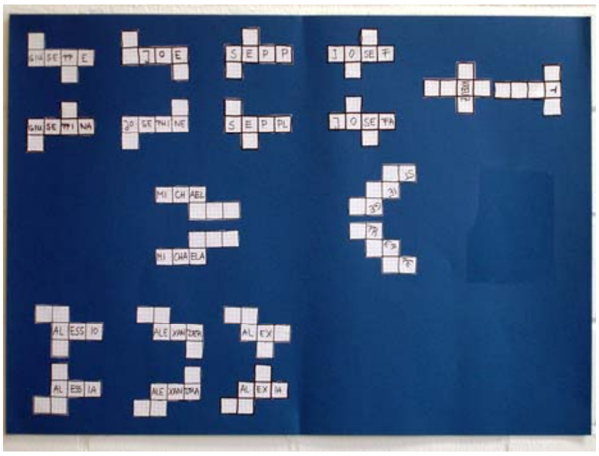
Wir konnten beobachten, dass sowohl Lehrer als auch Schüler begleitend zur vorhergehenden Aktivität 3 zunehmend Bezeichnungen in gesprochenen Worten für die Würfelnetze verwendeten. Allerdings geschah dies nicht bei allen Beteiligten. Es wurden auch nicht alle vorgeschlagenen Namen von der Gruppe angenommen und weiterverwendet. Beobachtungen über alle Experimente hinweg ergaben, dass die verwendeten Namen sich im Großen und Ganzen folgenden drei Typen zuordnen lassen:

- Typ 1: Namen, die Gestalten bezeichnen, etwa „Kreuz“, „Tisch“, „Haken“.
- Typ 2: Namen, die eine Zählsystematik beschreiben, etwa „4L-1H“, was immer das heißt.
- Typ 3: Namen, die Adressen meinen und keine gegenständliche Bezeichnung, etwa „Anna“ oder „Friedrich“.

Entgegen unserem ersten Eindruck erwiesen sich Namen des Typs 1 und des Typs 2 im Gegensatz zu Namen des Typs 3 als weniger effizient.

Dies liegt wohl daran, dass die meisten Namen des Typs 1 nicht nur das Würfelnetz selbst, sondern dieses in einer speziellen Lage zum Betrachter bezeichnen. Ändert man diese Lage, so ist ein solcher Gestaltname für viele nicht mehr informativ. Zudem war wegen der verschiedenen Sichtweisen der beteiligten Diskutierenden in Bezug auf jeweils dasselbe Objekt bisweilen eine Einigung über einen solchen Namen schwierig. Das spricht nicht prinzipiell gegen diese Namen, denn Gestaltbeschreibungen gehören zum Mathematikunterricht. Aber in dieser spezifischen Situation erzeugen sie ein Zusatzproblem, das die Arbeit behindern kann. Zudem ist für Schüler mit verschiedenen Muttersprachen das Beschreiben und Begründen von Bezeichnungen des Typs 1 schwierig.





Bilder 6.1 und 6.2: Mind Maps zu Würfelnetzen mit Namen

Auch Namen des Typs 2 erweisen sich selten oder kaum als fruchtbar für die Gruppenarbeit. Sie sind umständlich zu benutzen, bisweilen ebenfalls von der Lage abhängig, und erst dann in einer Situation sinnvoll, wenn die Beteiligten bereits Fähigkeiten besitzen, systematische Benennungen zu verwenden.

Dagegen fanden wir eine hohe Effizienz bei Namen des Typs 3. Das können ordinale Zahlen sein, die als Adressen benutzt werden, um die entsprechenden Netze auf der eigenen Mind Map oder auf anderen eindeutig anzusprechen. Als besonders effizient aber erwies sich in unseren Arbeitssituationen sowohl bei Lehrern als auch bei Schülern das Verwenden von Vornamen zum Adressieren der Würfelnetze. Vornamen haben zunächst den Vorteil, dass jeder welche kennt und daher jeder welche einbringen kann. Sie schaffen auch die für Schüler wichtige Möglichkeit, sich mit den von ihnen gefundenen Netzen zu identifizieren.

Vornamen bieten originelle Möglichkeiten, die Menge der Würfelnetze strukturiert zu beschreiben, insbesondere dann, wenn die zueinander achsensymmetrischen Würfelnetze noch getrennt aufgeführt sind. Diese zueinander symmetrischen Netze wurden in unseren Experimenten spontan mit einander ähnlichen Namen versehen, etwa „Franco“ und „Franca“, was auf natürliche Weise Paare beschreibt. Achsensymmetrische Netze erhielten zum Teil Palindrome als Namen, etwa „Otto“ oder „Anna“. So wird die Symmetrie des geometrischen Objektes in der Symmetrie des Namens dargestellt. Eine weitere Möglichkeit mit den Namen Strukturen darzustellen, haben wir als spontanes Ergebnis einzelner Arbeitsgruppen, sowohl bei Lehrern als auch bei Schülern beobachtet. Würfelnetze, die von dieser Gruppe als strukturverwandt gesehen wurden, erhielten sämtlich Namen, die männliche und weibliche Varianten ein und desselben Namens, etwa „Alexander“, in verschiedenen Sprachen waren: „Alexander“, „Alexandra“, „Alessandro“, „Alessandra“, „Alex“, „Alexa“, usw. Hier wird ein umgangssprachlich verfügbarer Wortschatz genutzt, um eine gefundene Struktur in mehreren Dimensionen zu beschreiben. Dieses systematische Benennen von Strukturen ist ein wesentlicher Teil mathematischen Tuns.

Aktivität 5: Klassen von Netzen bilden

Alle Beteiligten empfanden es als schwierig, die gefundenen Würfelnetze nach einem oder mehreren Tagen Arbeitspause wieder vollständig zu rekonstruieren. Die darauf bezogene Aktivität, die Würfelnetze so zu arrangieren, dass man nicht nur sieht, dass es sämtliche sind, sondern sie auch so zu arrangieren, dass man sie sämtlich leicht wieder findet, führte in den Arbeitsgruppen auf verschiedene Ansätze, die Würfelnetze zu Klassen zusammenzufassen.

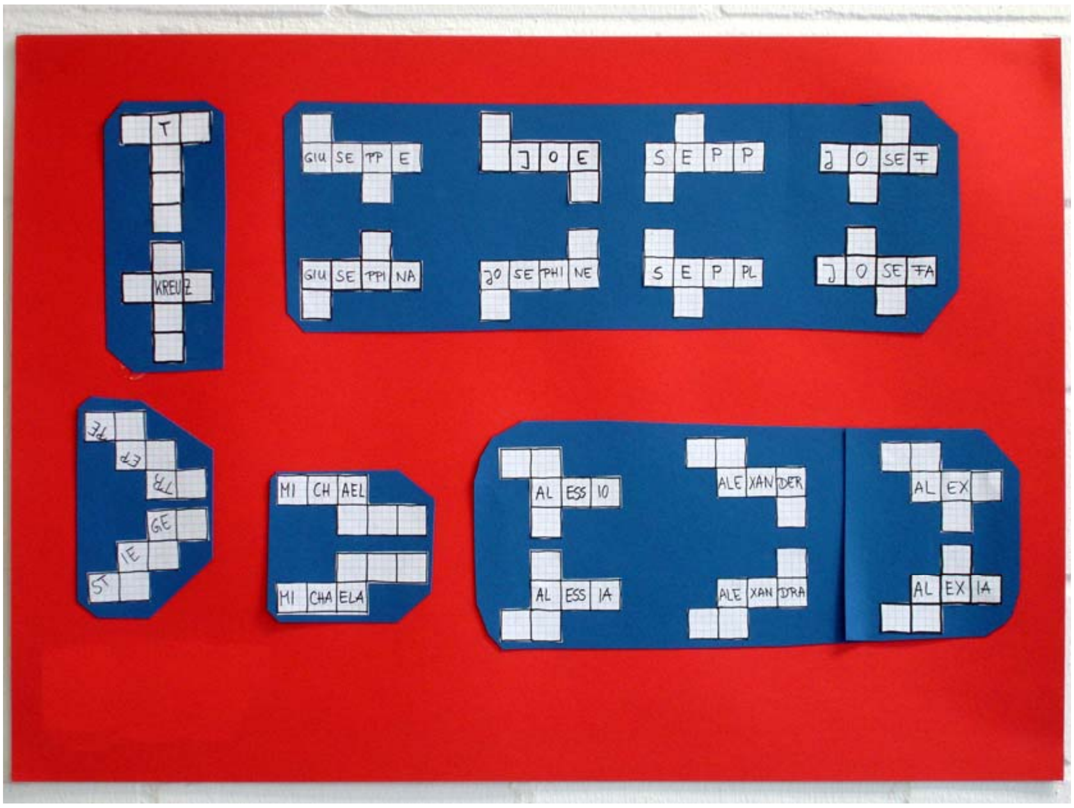


Bild 7: Klassen von Würfelnetzen

Dabei wurden in unseren Experimenten keine Klassen gebildet, die den Herstellungsprozess systematisch beschreiben, sondern nur Klassen, die die entstandenen Gestalten auf bestimmte Art sortieren. Es ist sehr wohl möglich, den ersten Ansatz zu verstärken. Wir haben es aus Zeitgründen nicht getan, nicht, weil wir diesen Ansatz nicht bedeutsam finden.

In den Klassenbildungen zeigte sich bei den verschiedenen Arbeitsgruppen eine gewisse Kohärenz, obwohl die Klassenbildungen nicht einheitlich verliefen. Die Klassen selbst wurden in kreisförmigen oder zeilenförmigen Gebieten auf der Mind Map zusammengefasst und teilweise durch Umfahren mit dem Stift als solche gekennzeichnet.

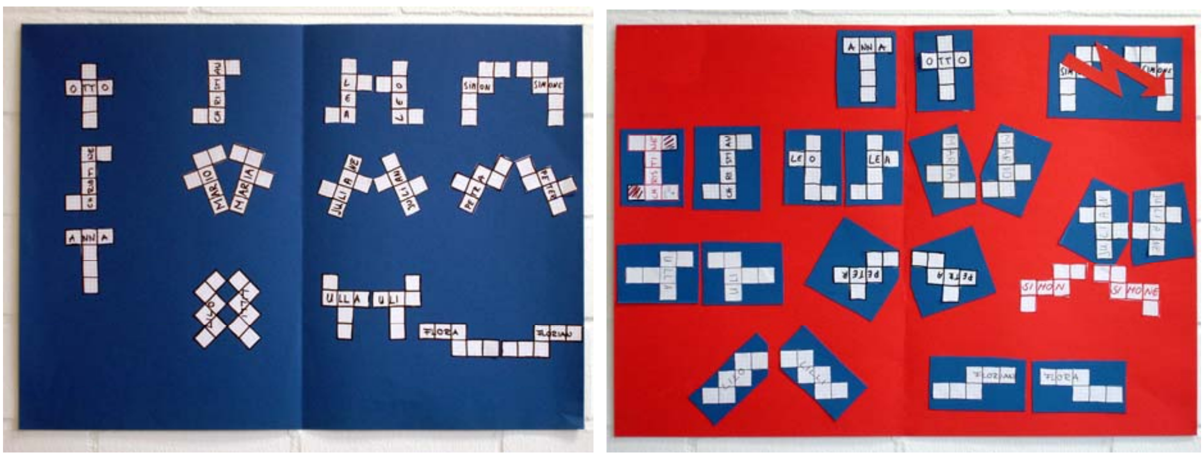
Die Aufgabe Klassen zu bilden führte dazu, die Namensgebung für die einzelnen Netze dahingehend zu überdenken, dass auch die Klassen in den Namen deutlich wurden. Das oben erwähnte Prinzip, einander ähnlich klingende Namen zu verwenden, verbreitete sich in den Arbeitsgruppen. Dies führte dazu, dass die Klassen – wir haben diesen Terminus bewusst nicht verwendet oder gar eingeführt – von den Arbeitsgruppen als „Familien“ gekennzeichnet wurden. Das kann man unserer Ansicht nach als Bezeichnung stehen lassen. Die so entstandenen Mind Maps nennen wir daher „Family-Flex-Poster“. Das vorherrschende Gliederungsprinzip zum Herstellen der Familien bestand bei unseren Experimenten darin, die Würfelnetze danach zu sortieren, welcher jeweils längste Streifen aneinanderhängender Quadrate in das Netz hineinpasst. In der Regel wurden so die Netze in vier oder fünf Familien zusammengefasst.

Aktivität 6: Poster revidieren und neue Mind Maps finden

Als materielles Ergebnis der Gruppenarbeit entsteht ein fertiges Poster, das nunmehr entweder den Namen „Family-Poster“ oder bei nicht deutlich erscheinender Gliederung nur den Namen „Poster“ verdient. Wir haben dazu Meta-Aufgaben gestellt:

- *Gegeben ist ein Poster einer anderen Arbeitsgruppe.*
- *Bitte prüft, ob das Poster falsche Netze enthält und markiert oder entfernt diese.*
- *Bitte prüft, ob Netze fehlen und ergänzt diese.*
- *Bitte prüft, ob ihr die Zusammenfassung in Familien gut findet. Ihr dürft sie ändern. Neue Namen aber solltet ihr nur geben, wenn euch dies unbedingt erforderlich erscheint.*

Meta-Aufgaben intendieren nicht, Fehler zu markieren. Wir sehen ihren Sinn vielmehr darin, teilweise unvollständige oder fehlerhafte Arbeitsergebnisse in ihren richtigen Beständen und in ihren eingebrachten Gedanken zu würdigen und als Ausgangspunkt zum Herstellen korrekter und vollständiger Lösungen zu nutzen. Sie schaffen eine Möglichkeit, sich mit den Ergebnissen anderer Arbeitsgruppen konstruktiv und weiterführend auseinanderzusetzen.



Bilder 8.1 und 8.2: revidierte Mind Maps zu Würfelnetzen

Die Arbeitsergebnisse werden mit folgender Technik dargestellt: Das gegebene Poster möge Würfelnetze aus weißem Papier zeigen, aufgeklebt auf blauen Karton. Beim Überarbeiten wird dieses Poster, das Original oder eine vorab erstellte Kopie, nach Auffassung der bearbeitenden Gruppe in Teile zerschnitten, die dann auf einem nunmehr roten Karton zu einem neuen Poster arrangiert werden. Dabei wird deutlich, ob das Arrangement des gegebenen Posters beim Bearbeiten stark geändert wurde, dann sieht man viele kleine blaue Gebiete auf der roten Fläche, oder ob das Arrangement des gegebenen Posters weitgehend bewahrt wurde, dann sieht man wenige große blaue Gebiete auf der roten Fläche.

Aktivität 7: Zusammenschau der Mind Maps in einer Ausstellung

Die vorhergehende Aktivität 6 beschreibt eine Arbeitsform, bei der sich Gruppen mit den Arbeitsergebnissen anderer Gruppen auseinandersetzen. Sie erfordert allerdings sehr viel Toleranz der Gruppen füreinander, weil die Poster möglicherweise stark geändert werden.

Eine sanftere und leicht zu organisierende Aktivität besteht in einer Synopse, also etwa darin, die Family-Poster der verschiedenen Gruppen in einer Ausstellung zu arrangieren und jede Gruppe beim Besichtigen der Ausstellung zu bitten, sich zu den Besonderheiten der jeweils anderen Poster Notizen zu machen, Gemeinsamkeiten und Unterschiede festzuhalten und möglicherweise nach Motiven und Gründen für wichtige Unterschiede zu suchen.

Dabei ergibt sich eine Perspektive für verschiedene Strategien und eine Sensibilität für den Bedarf, eine gemeinsame Sprache zu finden. Würfelnetze sind glücklicherweise Objekte, die in der Mathematik nicht mit festgelegten Bezeichnungen belegt sind. Bei der Auseinandersetzung miteinander verwendet man im Gespräch mit den anderen Gruppen sowohl deren Bezeichnungen als auch die eigenen, reflektiert auf diese Weise über den Nutzen einheitlicher Bezeichnungen und wird zu Einigungen beim Vereinbaren gemeinsamer Bezeichnungen angehalten.

Je nach dem, welche Arbeitsphilosophie in der jeweiligen Klasse intendiert ist, kann man verschiedene Poster in ihrer Vielfalt bestehen lassen oder versuchen, in einer gemeinsamen Anstrengung aus den Postern der kleinen Arbeitsgruppen heraus eines zu entwickeln, das als „Poster der ganzen Klasse“ ein Arbeitsergebnis ist, dem alle zustimmen können.

Aktivität 8: Würfelnetze mit Mind Map merken und reproduzieren

Eine Langzeitaktivität im Anschluss an die beschriebenen Aktivitäten besteht darin, ein von der ganzen Klasse verabschiedetes Family-Poster zu Würfelnetzen zur ständigen Vergegenwärtigung irgendwo im Klassenraum oder außerhalb davon in der Schule auszustellen und damit die Aufgabe zu verbinden, in regelmäßigen Zeitabständen die 11 Würfelnetze vollständig und systematisch geordnet aus dem Kopf zu zeichnen oder zu beschreiben.

3.6 Lernumgebung „Würfelnetze“: Realisieren der Leitideen

Das Arbeiten mit Würfelnetzen und Mind Maps stellt in geradezu klassischer Weise eine Lernumgebung dar und ist wie ein Leitbeispiel geeignet, die Leitgedanken einer Lernumgebung wirksam zu illustrieren:

L1 Mathematischer Sinn und Werksinn. Die Gegenstände sind mathematisch bedeutsam. Würfel, Netze und Kongruenzabbildungen treten auch außerhalb der Mathematik in der Lebenswelt auf, wenn man Formen vergleichen muss; sie haben somit einen Werksinn.

L2 Artikulation und soziale Organisation. Das Arbeiten mit konkreten Würfeln, Netzen und Mind Maps ermöglicht es, sich sowohl im Handeln als auch im Sprechen und im Schreiben allein und miteinander zu artikulieren. Es unterstützt das Arbeiten in Gruppen.

L3 Differenzierung. Bei den verschiedenen Aktivitäten stellt sich ohne weitere Beeinflussung in den Arbeitsgruppen eine natürliche Differenzierung ein. Es ist zudem möglich, durch gezielte Aufgabenverteilungen innerhalb der Aktivitäten weitere Differenzierungen vorzusehen. Die Arbeitsformen und der Gegenstand geben sowohl leistungsschwachen als auch leistungsstarken Lernenden die Möglichkeit zu einer erfolgreichen Mitarbeit. Hier besteht ein geradezu klassisches Muster einer Aufgabenstellung mit hoher Differenzierungsoption: Finde eine Lösung - Finde mehrere Lösungen – Begründe, weshalb du alle Lösungen gefunden hast.

L4 Logistik. Logistisch ist die Lernumgebung noch vertretbar. Die Würfel sind kein Verbrauchsmaterial, und es lohnt sich, sie als Set für die Klasse zu beschaffen. Dieses Würfelset muss nicht nur einer Klasse der Schule zur Verfügung stehen. Die Würfelnetze und die Mind Maps erfordern kein spezielles Material.

L5 Evaluierbarkeit. Die Arbeitsergebnisse sind für Lehrer mit einem gewissen Training auch aus der Distanz „auf Sicht“ effizient zu evaluieren. Die Lehrerin sollte die 11 Würfelnetze als schnell verfügbare Bilder auswendig kennen und nur im Notfall mit einem „Spickzettel“ durch die Klasse gehen. Wenn dies aber notwendig ist, dann sollte sie in aller Offenheit ihr persönliches Poster zu Würfelnetzen verwenden und bei den entsprechenden Aktivitäten auch zur Diskussion stellen.

L6 Vernetzung. Viele Beziehungen ergeben sich von dieser Lernumgebung zu anderen: Das Konzept der Mind Maps, hier realisiert in den Family-Flex-Postern, generiert eine Arbeitsform, die auch bei anderen mathematischen Gegenständen ein systematisches Erfassen und Klassifizieren in Gruppenarbeit ermöglicht, etwa bei Bildern geometrischer Körper, bei niedergeschriebenen Zahlenmustern oder bei verschiedenen Lösungen zu offenen Sachaufgaben. Anstelle der Würfel lassen sich andere Körper wählen, zu denen man Netze sucht, etwa Tetraeder, quadratische Säulen oder andere, die in der Grundschule von Interesse sind. Die Würfelnetze weisen vielfältige Beziehungen zu anderen Figuren auf, die aus Quadraten zusammengesetzt sind, etwa zu „Quadrominos“ (Figuren aus 4 Quadraten) oder „Pentominos“ (Figuren aus 5 Quadraten).

4 Ausblick

Paradigmatisch an dieser Lernumgebung zur Mathematik ist, dass sie nicht ein eindeutig vorherbestimmtes Ergebnis intendiert. Vielmehr erhellt sie zwei wesentliche Aspekte eines guten Mathematikunterrichts in der Grundschule: Sie belegt zum einen, dass nicht allein die Arithmetik, sondern auch die Geometrie ein substanzielles Arbeitsgebiet in der Grundschule bildet. Zum anderen verdeutlicht sie, dass der Kern des mathematischen Tuns im aktiven Konstruieren und den dabei entwickelten Strategien liegt und nicht im Reproduzieren von schematischen Fertigkeiten.

Literaturverzeichnis

Artigue, M., & Perrin-Glorian, M.-J. (1991). Didactic engineering. Research and Development Tool: Some Theoretical Problems Linked to this Duality. For the Learning of Mathematics 11(1991), 5-29.

Gallin, P., & Ruf, U. (1999): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen. Band 2: Spuren legen – Spuren lesen. Seelze: Kallmeyer 1999

Hengartner, E. (2002): Mathe-Projekt. Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte: Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Internet-Quelle (2002): http:\\www.mathe-projekt.ch\

KMK (2004): Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards zum Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4), Beschluss vom 15.10.2004. Luchterhand

Leutner, D., Leopold, C., & Wirth, J. (2004). Selbstreguliertes Lernen – Förderung des Selbstregulierten Lernens als fachübergreifende Kompetenz. In: K. Klemm (Hrsg.) (2004). Bildungsforschung nach PISA. (S. 46-

Prengel, A. (2004): Anerkennung in der integrativen Grundschulpädagogik: Egalität, Heterogenität und Hierarchie. In: A. Hinz und U. Geiling, Integrationspädagogik im Diskurs. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Wittmann, E. (1992): Mathematikdidaktik als ‚design science'. In: Journal für Mathematikdidaktik 13(1992), 55-70.

Wollring, B. (1999). Mathematikdidaktik zwischen Diagnostik und Design. In Ch. Selter, & G. Walther, Mathematikdidaktik als design science. (S. 270-276). Stuttgart: Klett Verlag.

Wollring, B. (2002): Spatial Reconstructions from Primary Children's Drawings. In: B. Barton / K. C. Irwin / M. Pfannkuch, & M. O. J. Thomas (Eds.), Mathematics Education in the South Pacific . Proceedings of the 25th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Auckland. (S. 706-713). Sydney: MERGA Inc.

Wollring, B. (2003). „Mit den Kindern Geometrie neu entdecken" - Kooperatives Design der Arbeitsumgebung „Streifenschablonen" für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In M. Baum und H. Wielpütz (Hrsg.), Mathematik in der Grundschule - Ein Arbeitsbuch. (S. 147-176) Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung.

Wollring, B. (2004). Kooperative Aufgabenformate und Lernumgebungen im Mathematikunterricht der Grundschule. In: H. Dauber (Hrsg.), Gestalten – Entdecken. Lernumgebungen für selbständiges und kooperatives Lernen. (S. 14-21) Kassel: Zentrum für Lehrerbildung der Universität Kassel. Reihe Studium und Forschung.

Wollring, B. (2006): Transparentkopieren – Lernumgebungen für die Grundschule an der Schnittstelle von Mathematik und Kunst. In: E. Rathgeb-Schnierer / U. Roos (Hrsg.), Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. Festschrift für Sybille Schütte. (S. 57-70). München: Oldenbourg Verlag

Wollring, B. (2006): Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule – Erwerben, Korrespondieren, Festhalten. In: Grundschulmagazin 2006, Heft 05/06

Wollring, B. (2007): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Erscheint in der Schriftenreihe der Arbeitsgruppe „Empirische Bildungsforschung“ an der Universität Kassel

Prof. Dr. Bernd Wollring
Fachbereich 17 Mathematik, Universität Kassel
Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel
wollring@mathematik.uni-kassel.de